Σημειώσεις Γραμμικής Άλγεβρας

Κεφάλαιο 1

Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων και Πίνακες

1.1 Εισαγωγή στα Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Η μελέτη των συστημάτων γραμμικών εξισώσεων και των λύσεών τους είναι ένα από τα κύρια θέματα της γραμμικής άλγεβρας. Στην ενότητα αυτή θα εισάγουμε την ορολογία που χρησιμοποιούμε όταν μιλάμε για συστήματα γραμμικών εξισώσεων και θα μιλήσουμε για μία μέθοδο για την επίλυση γραμμικών συστημάτων.

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Μία ευθεία γραμμή στο επίπεδο xy μπορεί να αναπαρασταθεί αλγεβρικά από μία εξίσωση της μορφής

$$a_1x + a_2y = b$$

Μία εξίσωση αυτής της μορφής ονομάζεται γραμμική εξίσωση με μεταβλητές x και y. Γενικότερα θα ονομάζουμε ***γραμμική εξίσωση*** με n μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ μία εξίσωση η οποία μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

όπου τα $a_1, a_2, \ldots, a_n$ και b είναι πραγματικές σταθερές. Πολλές φορές οι μεταβλητές μίας γραμμικής εξίσωσης ονομάζονται και ***άγνωστοι***.

Παράδειγμα 1 Οι παρακάτω είναι γραμμικές εξισώσεις:

$$x + 3y = 7 \qquad\qquad x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$$
$$y = \tfrac{1}{2}x + 3z + 1 \qquad\qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

Παρατηρούμε ότι μία γραμμική εξίσωση δεν περιλαμβάνει γινόμενα ή ρίζες των μεταβλητών. Όλες οι μεταβλητές εμφανίζονται μόνο στην πρώτη δύναμη και δεν εμφανίζονται σαν ορίσματα τριγωνομετρικών, λογαριθμικών ή εκθετικών συναρτήσεων. Οι παρακάτω *δεν* είναι γραμμικές εξισώσεις:

$$\begin{array}{ll} x + 3y^2 = 7 & 3x + 2y - z + xz = 4 \\ y - \sin x = 0 & \sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1 \quad \triangle \end{array}$$

Μία ***λύση*** της γραμμικής εξίσωσης $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ είναι μία ακολουθία n αριθμών $s_1, s_2, \ldots, s_n$ οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση αν αντικαταστήσουμε $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2, \ldots$, $x_n = s_n$. Το σύνολο όλων των λύσεων της εξίσωσης ονομάζεται ***σύνολο λύσεων*** ή ***γενική λύση*** της εξίσωσης.

Παράδειγμα 2 Να βρεθεί το σύνολο λύσεων των

$$\text{(α)} \quad 4x - 2y = 1 \qquad\qquad \text{(β)} \quad x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 5$$

Λύση (α). Για να βρούμε τις λύσεις της (α), μπορούμε είτε να δώσουμε μία αυθαίρετη τιμή στο x και να λύσουμε ως προς y, είτε να δώσουμε μία αυθαίρετη τιμή στο y και να λύσουμε ως προς x. Αν ακολουθήσουμε την πρώτη προσέγγιση και δώσουμε στο x την αυθαίρετη τιμή t, παίρνουμε

$$x = t, \qquad y = 2t - \tfrac{1}{2}$$

Οι τύποι αυτοί περιγράφουν το σύνολο λύσεων μέσω της αυθαίρετης παραμέτρου t. Μπορούμε να πάρουμε συγκεκριμένες αριθμητικές λύσεις αντικαθιστώντας στους τύπους αυτούς συγκεκριμένες τιμές της t. Για παράδειγμα για $t = 3$ παίρνουμε τη λύση $x = 3$, $y = 11/2$ και για $t = -1/2$ παίρνουμε τη λύση $x = -1/2$, $y = -3/2$.

Αν ακολουθήσουμε την δεύτερη προσέγγιση και δώσουμε στο y την αυθαίρετη τιμή t παίρνουμε

$$x = \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}, \qquad y = t$$

Παρόλο που οι τύποι αυτοί είναι διαφορετικοί από αυτούς που πήραμε στην προηγούμενη περίπτωση, δίνουν το ίδιο σύνολο λύσεων με τους προηγούμενους αν στη θέση της t αντικαταστήσουμε όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Για παράδειγμα οι προηγούμενοι τύποι μας έδωσαν τη λύση $x = 3$, $y = 11/2$ για $t = 3$, ενώ οι τύποι αυτοί μας δίνουν τη λύση αυτή για $t = 11/2$.

Λύση (β). Για να βρούμε το σύνολο λύσεων της (β) μπορούμε να δώσουμε αυθαίρετες τιμές σε οποιεσδήποτε δύο μεταβλητές και να λύσουμε ως προς την τρίτη. Για παράδειγμα αν δώσουμε τις αυθαίρετες τιμές s και t στις x_2 και x_3 αντίστοιχα, και λύσουμε ως προς x_1 παίρνουμε

$$x_1 = 5 + 4s - 7t, \qquad x_2 = s, \qquad x_3 = t \qquad \triangle$$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ένα πεπερασμένο σύνολο γραμμικών εξισώσεων με μεταβλητές $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ ονομάζεται ***σύστημα γραμμικών εξισώσεων*** ή ***γραμμικό σύστημα***. Μία ακολουθία αριθμών $s_1,\ s_2, \ldots,\ s_n$ ονομάζεται ***λύση*** του συστήματος αν $x_1 = s_1,\ x_2 = s_2, \ldots,$ $x_n = s_n$ είναι λύση κάθε εξίσωσης του συστήματος. Για παράδειγμα το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 9x_3 & = & -4 \end{array}$$

έχει τη λύση $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, εφόσον οι τιμές αυτές ικανοποιούν και τις δύο εξισώσεις. Από την άλλη, η $x_1 = 1$, $x_2 = 8$, $x_3 = 1$ δεν είναι λύση, εφόσον οι τιμές αυτές ικανοποιούν μόνο την πρώτη από τις δύο εξισώσεις του συστήματος.

Υπάρχουν συστήματα γραμμικών εξισώσεων τα οποία δεν έχουν λύσεις. Για παράδειγμα αν πολλαπλασιάσουμε τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 4 \\ 2x & + & 2y & = & 6 \end{array}$$

με $1/2$ παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 4 \\ x & + & y & = & 3 \end{array}$$

το οποίο προφανώς δεν έχει καμία λύση εφόσον οι δύο εξισώσεις του είναι αντιφατικές.

Ένα σύστημα εξισώσεων το οποίο δεν έχει καμία λύση θα ονομάζεται ***μη συμβιβαστό***. Αν υπάρχει τουλάχιστον μία λύση τότε το σύστημα θα ονομάζεται ***συμβιβαστό***. Για να δούμε τις πιθανές καταστάσεις που μπορεί να προκύψουν κατά την επίλυση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων, ας θεωρήσουμε το γενικό σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους x και y:

$$\begin{array}{rcrcrl} a_1x & + & b_1y & = & c_1 & \qquad (a_1, b_1 \text{ όχι και οι δύο } 0) \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 & \qquad (a_2, b_2 \text{ όχι και οι δύο } 0) \end{array}$$

Οι δύο αυτές εξισώσεις περιγράφουν δύο ευθείες γραμμές, τις l_1 και l_2. Εφόσον ένα σημείο (x, y) βρίσκεται σε μία ευθεία αν και μόνο αν οι αριθμοί x και y ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας, οι λύσεις του συστήματος θα αντιστοιχούν στα σημεία τομής των l_1 και l_2. Υπάρχουν τρείς πιθανές περιπτώσεις (Σχήμα 1):

(α) Οι ευθείες l_1 και l_2 είναι παράλληλες. Στην περίπτωση αυτή δεν τέμνονται σε κανένα σημείο και άρα το σύστημα δεν έχει καμία λύση.

(β) Οι ευθείες l_1 και l_2 τέμνονται σε ένα μόνο σημείο. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα έχει ακριβώς μία λύση.

(γ) Οι ευθείες l_1 και l_2 ταυτίζονται. Στην περίπτωση αυτή τέμνονται σε άπειρα σημεία και άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Σχήμα 1

Παρότι συζητήσαμε μόνο την περίπτωση δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, θα δείξουμε παρακάτω ότι το ίδιο συμπέρασμα ισχύει για οποιοδήποτε γραμμικό σύστημα:

Κάθε σύστημα γραμμικών εξισώσεων είτε δεν έχει καμία λύση, είτε έχει ακριβώς μία λύση, είτε έχει άπειρες λύσεις.

Θα γράφουμε ένα σύστημα m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους ως εξής

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

όπου $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι οι άγνωστοι και τα a και b με τους δείκτες είναι σταθερές.

Για παράδειγμα η γενική μορφή ενός συστήματος τριών γραμμικών εξισώσεων με τέσσερεις αγνώστους είναι:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & a_{14}x_4 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & a_{24}x_4 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & a_{34}x_4 & = & b_3 \\ a_{41}x_1 & + & a_{42}x_2 & + & a_{43}x_3 & + & a_{44}x_4 & = & b_4 \end{array}$$

Ο διπλός δείκτης κάθε συντελεστή των αγνώστων είναι ιδιαίτερα χρήσιμος, γιατί μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τη θέση του συντελεστή στο σύστημα. Ο πρώτος δείκτης του συντελεστή a_{ij} μας δείχνει σε ποια εξίσωση εμφανίζεται ο συντελεστής και ο δεύτερος δείκτης του συντελεστή μας δείχνει ποιος άγνωστος πολλαπλασιάζεται με τον συντελεστή. Έτσι ο a_{12} βρίσκεται στην πρώτη εξίσωση και πολλαπλασιάζεται με τον άγνωστο x_2.

Η γραφή του συστήματος m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους μπορεί να συντομευθεί, αρκεί να θυμόμαστε που μπαίνουν τα $+$, τα x και τα $=$, γράφοντας μόνο την ορθογώνια διευθέτηση αριθμών:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Θα ονομάζουμε την ορθογώνια αυτή διευθέτηση αριθμών ***επαυξημένο πίνακα*** του συστήματος. (Ο όρος πίνακας χρησιμοποιείται στα μαθηματικά για ορθογώνιες διευθετήσεις αριθμών. Οι πίνακες εμφανίζονται σε πολλές περιοχές. Θα τους μελετήσουμε λεπτομερώς σε παρακάτω ενότητες.) Για παράδειγμα ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \end{array}$$

είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Όταν κατασκευάζουμε τον επαυξημένο πίνακα ενός συστήματος οι άγνωστοι πρέπει να γράφονται με την ίδια σειρά σε κάθε εξίσωση.

Η κύρια μέθοδος που ακολουθούμε για να λύσουμε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων είναι η αντικατάσταση του δοσμένου συστήματος με ένα νέο σύστημα το οποίο έχει το ίδιο σύνολο λύσεων με το αρχικό, αλλά το οποίο είναι πιο εύκολο να λυθεί. Το νέο αυτό σύστημα το παίρνουμε σε μία σειρά βημάτων εφαρμόζοντας τους παρακάτω τρείς τύπους διαδικασιών ώστε να απαλείψουμε τους αγνώστους συστηματικά.

1. Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους μίας εξίσωσης με μία μη μηδενική σταθερά.
2. Εναλλάσουμε δύο εξισώσεις.
3. Προσθέτουμε ένα πολλαπλάσιο μίας εξίσωσης σε μία άλλη.

Εφόσον οι γραμμές (οριζόντιες γραμμές) του επαυξημένου πίνακα αντιστοιχούν στις εξισώσεις του αντίστοιχου συστήματος, η εφαρμογή αυτών των τριών διαδικασιών στις εξισώσεις του συστήματος αντιστοιχεί στην εφαρμογή των παρακάτω τριών διαδικασιών στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα.

1. Πολλαπλασιάζουμε όλους τους αριθμούς μίας γραμμής με μία μη μηδενική σταθερά.
2. Εναλλάσουμε δύο γραμμές.
3. Προσθέτουμε ένα πολλαπλάσιο μίας γραμμής σε μία άλλη.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΓΡΑΜΜΩΝ

Οι διαδικασίες αυτές ονομάζονται ***στοιχειώδεις διαδικασίες γραμμών***. Στο επόμενο παράδειγμα θα δούμε πώς χρησιμοποιούμε τις διαδικασίες αυτές για να λύσουμε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Εφόσον μία μέθοδος με την οποία βρίσκουμε λύσεις θα αναπτυχθεί στην επόμενη ενότητα, δεν χρειάζεται να ανησυχείτε για τον τρόπο με τον οποίο επιλέξαμε τα βήματα στο παράδειγμα αυτό. Η κύρια προσπάθειά σας πρέπει να είναι να καταλάβετε τους υπολογισμούς.

Παράδειγμα 3 Στην αριστερή στήλη λύνουμε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων εφαρμόζοντας τις στοιχειώδεις διαδικασίες στις εξισώσεις του συστήματος και στη δεξιά στήλη λύνουμε το ίδιο σύστημα εφαρμόζοντας τις στοιχειώδεις διαδικασίες στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -2 φορές την πρώτη εξίσωση στη δεύτερη και παίρνουμε | Προσθέτουμε -2 φορές την πρώτη γραμμή στη δεύτερη και παίρνουμε

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & 2y & - & 7z & = & -17 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -3 φορές την πρώτη εξίσωση στην τρίτη και παίρνουμε | Προσθέτουμε -3 φορές την πρώτη γραμμή στην τρίτη και παίρνουμε

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & 2y & - & 7z & = & -17 \\ & & 3y & - & 11z & = & -27 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη εξίσωση με 1/2 και παίρνουμε | Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη γραμμή με 1/2 και παίρνουμε

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & y & - & \frac{7}{2}z & = & -\frac{17}{2} \\ & & 3y & - & 11z & = & -27 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -3 φορές τη δεύτερη εξίσωση στην τρίτη και παίρνουμε | Προσθέτουμε -3 φορές τη δεύτερη εξίσωση στην τρίτη και παίρνουμε

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & y & - & \frac{7}{2}z & = & -\frac{17}{2} \\ & & & - & \frac{1}{2}z & = & -\frac{3}{2} \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την τρίτη εξίσωση με -2 και παίρνουμε

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & y & - & \frac{7}{2}z & = & -\frac{17}{2} \\ & & & & z & = & 3 \end{array}$$

Πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή με -2 και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -1 φορά τη δεύτερη εξίσωση στην πρώτη και παίρνουμε

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & + & \frac{11}{2}z & = & \frac{35}{2} \\ & & y & - & \frac{7}{2}z & = & -\frac{17}{2} \\ & & & & z & = & 3 \end{array}$$

Προσθέτουμε -1 φορά τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε $-\frac{11}{2}$ φορές την τρίτη εξίσωση στην πρώτη και $\frac{7}{2}$ φορές την τρίτη εξίσωση στην δεύτερη και παίρνουμε

$$\begin{array}{ccccc} x & & & = & 1 \\ & y & & = & 2 \\ & & z & = & 3 \end{array}$$

Προσθέτουμε $-\frac{11}{2}$ φορές την τρίτη γραμμή στην πρώτη και $\frac{7}{2}$ φορές την τρίτη γραμμή στην δεύτερη και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Είναι προφανές ότι η λύση είναι

$$x = 1, \qquad y = 2, \qquad z = 3 \qquad \triangle$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 1.1

1. Ποιες από τις παρακάτω είναι γραμμικές εξισώσεις με μεταβλητές x_1, x_2 και x_3;

(α) $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2}x_3 = 1$ (β) $x_1 - 3x_2 + x_1x_3 = 2$ (γ) $x_1 = -7x_2 + 3x_3$
(δ) $x_1^{-2} + x_2 + 8x_3 = 5$ (ε) $x_1^{3/5} - 2x_2 + x_3 = 4$ (στ) $\pi x_1 - \sqrt{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 7^{1/3}$

2. Αν k είναι μία σταθερά, ποιες από τις παρακάτω είναι γραμμικές εξισώσεις;

(α) $x_1 - x_2 + x_3 = \sin k$ (β) $kx_1 - \frac{1}{k}x_2 = 9$ (γ) $2^k x_1 + 7x_2 - x_3 = 0$

3. Να βρεθεί το σύνολο λύσεων κάθε μίας από τις παρακάτω γραμμικές εξισώσεις.

(α) $7x - 5y = 3$ (β) $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7$
(γ) $-8x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 1$ (δ) $3v - 8w + 2x - y + 4z = 0$

4. Να βρεθεί ο επαυξημένος πίνακας για κάθε ένα από τα παρακάτω συστήματα γραμμικών εξισώσεων.

(α) $$\begin{array}{ccccc} 3x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & = & 3 \\ 7x_1 & + & 3x_2 & = & 2 \end{array}$$

(β) $$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & & & + & 2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 7 \\ 6x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

(γ) $$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ & & 3x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & 2 \\ & & & & x_3 & + & 7x_4 & & & = & 1 \end{array}$$

(δ) $$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & 1 \\ & x_2 & & = & 2 \\ & & x_3 & = & 3 \end{array}$$

5. Να βρεθεί το σύστημα που αντιστοιχεί σε κάθε έναν από τους παρακάτω επαυξημένους πίνακες.

(α) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

(γ) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (δ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

6. (α) Βρείτε μία γραμμική εξίσωση με μεταβλητές x και y η οποία έχει γενική λύση $x = 5 + 2t$, $y = t$.

(β) Δείξτε ότι η $x = t$, $y = \frac{1}{2}t - \frac{5}{2}$ είναι επίσης γενική λύση της εξίσωσης του μέρους (α).

7. Η καμπύλη $y = ax^2 + bx + c$ του Σχήματος 2 περνάει από τα σημεία (x_1, y_1), (x_2, y_2) και (x_3, y_3). Δείξτε ότι οι συντελεστές a, b και c είναι μία λύση του συστήματος με επαυξημένο πίνακα

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{bmatrix}$$

Σχήμα 2

8. Για ποια τιμή (τιμές) της σταθεράς k δεν έχει το παρακάτω σύστημα καμία λύση; Έχει ακριβώς μία λύση; Έχει άπειρες λύσεις;

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 3 \\ 2x & - & 2y & = & k \end{array}$$

9. Θεωρήστε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{rcrcr} ax & + & by & = & k \\ cx & + & dy & = & l \\ ex & + & fy & = & m \end{array}$$

Ποιες θα είναι οι σχετικές θέσεις των ευθειών $ax+by = k$, $cx+dy = l$ και $ex+fy = m$ όταν

(α) το σύστημα δεν έχει καμία λύση

(β) το σύστημα έχει ακριβώς μία λύση

(γ) το σύστημα έχει άπειρες λύσεις

10. Δείξτε ότι αν το σύστημα εξισώσεων της Άσκησης 9 είναι συμβιβαστό, τότε τουλάχιστον μία από τις εξισώσεις μπορεί να αφαιρεθεί χωρίς να αλλάξει το σύνολο λύσεων.

11. Έστω $k = l = m = 0$ στην Άσκηση 9. Δείξτε ότι το σύστημα είναι συμβιβαστό. Τι μπορούμε να πούμε για το σημείο τομής των τριών ευθειών αν το σύστημα έχει ακριβώς μία λύση;

12. Θεωρήστε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & a \\ x & & & + & z & = & b \\ 2x & + & y & + & 3z & = & c \end{array}$$

Δείξτε ότι για να είναι το σύστημα συμβιβαστό, πρέπει τα a, b και c να ικανοποιούν τη συνθήκη $c = a + b$.

13. Δείξτε ότι αν οι γραμμικές εξισώσεις $x_1 + kx_2 = c$ και $x_1 + lx_2 = d$ έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων, τότε ταυτίζονται.

1.2 Απαλοιφή Gauss

Στην ενότητα αυτή θα δούμε μία συστηματική διαδικασία για την εύρεση των λύσεων συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Η διαδικασία αυτή βασίζεται στην ιδέα της αναγωγής του επαυξημένου πίνακα σε μία μορφή για την οποία η εύρεση της λύσης είναι απλή.

ΑΝΗΓΜΕΝΗ ΚΛΙΜΑΚΩΤΗ ΜΟΡΦΗ

Στο Παράδειγμα 3 της προηγούμενης ενότητας λύσαμε το δοθέν γραμμικό σύστημα ανάγοντας τον επαυξημένο πίνακα στον

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

από τον οποίο η λύση του συστήματος ήταν προφανής. Αυτό είναι ένα παράδειγμα ενός πίνακα ο οποίος βρίσκεται σε ***ανηγμένη κλιμακωτή μορφή***. Για να βρίσκεται στη μορφή αυτή ένας πίνακας πρέπει να έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

1. *Αν μία γραμμή δεν αποτελείται αποκλειστικά από μηδενικά, τότε ο πρώτος μη μηδενικός αριθμός της γραμμής είναι το 1. (Τον ονομάζουμε* ***αρχικό 1****.)*
2. *Αν υπάρχουν γραμμές οι οποίες αποτελούνται αποκλειστικά από μηδενικά, τότε είναι ομαδοποιημένες όλες στο κάτω μέρος του πίνακα.*
3. *Σε οποιεσδήποτε δύο διαδοχικές γραμμές οι οποίες δεν αποτελούνται αποκλειστικά από μηδενικά, το αρχικό 1 της γραμμής η οποία είναι πιο χαμηλά βρίσκεται δεξιότερα από το αρχικό 1 της γραμμής η οποία είναι πιο ψηλά.*
4. *Κάθε στήλη η οποία περιέχει ένα αρχικό 1 έχει μηδενικά σε όλες τις άλλες θέσεις.*

Αν ένας πίνακας έχει τις ιδιότητες **1**, **2** και **3** (άλλα όχι αναγκαστικά την **4**), τότε θα λέμε ότι βρίσκεται σε ***κλιμακωτή μορφή***.

Παράδειγμα 1 Οι παρακάτω πίνακες είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι παρακάτω πίνακες είναι σε κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο αναγνώστης πρέπει να επιβεβαιώσει ότι ο κάθε ένας από τους παραπάνω πίνακες ικανοποιεί τις αναγκαίες ιδιότητες. $\triangle$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Όπως φαίνεται από το προηγούμενο παράδειγμα ένας πίνακας σε κλιμακωτή μορφή έχει μηδενικά κάτω από κάθε αρχικό 1, ενώ ένας πίνακας σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή έχει μηδενικά και πάνω και κάτω από κάθε αρχικό 1.

Αν μετά από μία ακολουθία στοιχειωδών διαδικασιών γραμμών ο επαυξημένος πίνακας ενός συστήματος βρεθεί σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, τότε η λύση του συστήματος μπορεί να βρεθεί είτε άμεσα είτε, στη χειρότερη περίπτωση, μετά από λίγα απλά βήματα, όπως θα δούμε στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2 Έστω ότι ο επαυξημένος πίνακας ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων έχει αναχθεί με διαδικασίες γραμμών στην δοθείσα ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Να λυθεί το σύστημα.

$$\text{(α)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{(β)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{(γ)} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(δ)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση (α). Το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων είναι το

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & 5 \\ & x_2 & & = & -2 \\ & & x_3 & = & 4 \end{array}$$

Είναι άμεσο ότι $x_1 = 5$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4$.

Λύση (β). Το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων είναι το

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & & & + & 4x_4 & = & -1 \\ & & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 6 \\ & & & & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \end{array}$$

Εφόσον οι x_1, x_2 και x_3 αντιστοιχούν σε αρχικά 1 στον επαυξημένο πίνακα, θα τις ονομάζουμε ***βασικές μεταβλητές***. Τις μεταβλητές που δεν είναι βασικές (στην περίπτωση αυτή την x_4) θα τις ονομάζουμε ***ελέυθερες μεταβλητές***. Λύνοντας ως προς τις βασικές μεταβλητές συναρτήσει της ελέυθερης μεταβλητής παίρνουμε

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & = & -1 & - & 4x_4 \\ x_2 & = & 6 & - & 2x_4 \\ x_3 & = & 2 & - & 3x_4 \end{array}$$

Εφόσον η x_4 μπορεί να πάρει μία αυθαίρετη τιμή, έστω t, έχουμε άπειρες λύσεις. Η γενική λύση δίνεται από τους τύπους

$$x_1 = -1 - 4t, \qquad x_2 = 6 - 2t, \qquad x_3 = 2 - 3t, \qquad x_4 = t$$

Λύση (γ). Το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων είναι το

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 6x_2 & & & & & + & 4x_5 & = & -2 \\ & & & & x_3 & & & + & 3x_5 & = & 1 \\ & & & & & & x_4 & + & 5x_5 & = & 2 \end{array}$$

Εδώ οι βασικές μεταβλητές είναι οι x_1, x_3 και x_4 και οι ελεύθερες μεταβλητές είναι οι x_2 και x_5. Λύνοντας ως προς τις βασικές μεταβλητές συναρτήσει των ελέυθερων μεταβλητών παίρνουμε

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & -2 & - & 4x_5 & - & 6x_2 \\ x_3 & = & 1 & - & 3x_5 & & \\ x_4 & = & 2 & - & 5x_5 & & \end{array}$$

Εφόσον μπορούμε να δώσουμε μία αυθαίρετη τιμή, t, στην x_5, και μία αυθαίρετη τιμή, s, στην x_2, υπάρχουν άπειρες λύσεις. Η γενική λύση δίνεται από τους τύπους

$$x_1 = -2 - 4t - 6s, \qquad x_2 = s, \qquad x_3 = 1 - 3t, \qquad x_4 = 2 - 5t, \qquad x_5 = t$$

Λύση (δ). Η τελευταία εξίσωση στο αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων είναι η

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

Εφόσον η εξίσωση αυτή δεν ικανοποιείται ποτέ, το σύστημα δεν έχει καμία λύση. $\triangle$

ΑΠΑΛΟΙΦΗ GAUSS

Μόλις είδαμε πόσο εύκολο είναι να λύσουμε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων αν ο επαυξημένος του πίνακάς είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Τώρα θα δόσουμε μία διαδικασία σε βήματα, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αναχθεί ένας πίνακας στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του. Για να γίνει πιο ξεκάθαρο τι κάνουμε, μαζί με την διατύπωση κάθε βήματος της διαδικασίας θα το εφαρμόζουμε στον παρακάτω πίνακα για να πάρουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Βήμα 1ο. Εντοπίζουμε την πιο αριστερή στήλη η οποία δεν αποτελείται αποκλειστικά από μηδενικά.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$
$\uparrow$

Πιο αριστερή μη μηδενική στήλη

Βήμα 2ο. Αν είναι αναγκαίο εναλλάσουμε την γραμμή που βρίσκεται στην κορυφή του πίνακα με μία άλλη γραμμή για να φέρουμε ένα μη μηδενικό στοιχείο στην κορυφή της στήλης που βρήκαμε στο Βήμα 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Εναλλάξαμε την πρώτη με τη δεύτερη γραμμή του προηγούμενου πίνακα.

Βήμα 3ο. Αν το στοιχείο το οποίο βρίσκεται τώρα στην κορυφή της στήλης την οποία βρήκαμε στο Βήμα 1 είναι a, τότε πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με $1/a$ για να πάρουμε ένα αρχικό 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάσαμε την πρώτη γραμμή του προηγούμενου πίνακα με 1/2.

Βήμα 4ο. Προσθέτουμε κατάλληλα πολλαπλάσια της γραμμής η οποία βρίσκεται στην κορυφή στις γραμμές κάτω από αυτήν ώστε όλα τα στοιχεία κάτω από το αρχικό 1 να γίνουν 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Προσθέσαμε -2 φορές την πρώτη γραμμή του προηγούμενου πίνακα στην τρίτη γραμμή.

Βήμα 5ο. Τώρα καλύπτουμε την γραμμή που βρίσκεται στην κορυφή του πίνακα και αρχίζουμε πάλι εφαρμόζοντας το Βήμα 1 στον υποπίνακα που απομένει. Συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο μέχρι όλος ο πίνακας να είναι σε κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$
$\uparrow$

Πιο αριστερή μη μηδενική στήλη του υποπίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάσαμε την πρώτη γραμμή του υποπίνακα με -1/2 για να πάρουμε ένα αρχικό 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Προσθέσαμε -5 φορές την πρώτη γραμμή του υποπίνακα στη δεύτερη γραμμή του υποπίνακα για να πάρουμε μηδενικά κάτω από το αρχικό 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Καλύπτουμε την πρώτη γραμμή του υποπίνακα και γυρνάμε στο Βήμα 1.

Πιο αριστερή μη μηδενική στήλη του νέου υποπίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάσαμε την πρώτη (και μοναδική) γραμμή του νέου υποπίνακα με 2 για να πάρουμε ένα αρχικό 1.

Ο πίνακας βρίσκεται τώρα σε κλιμακωτή μορφή. Για να πάρουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή χρειαζόμαστε το παρακάτω πρόσθετο βήμα.

Βήμα 6ο. Αρχίζοντας από την τελευταία γραμμή και δουλεύοντας προς τα πάνω, προσθέτουμε κατάλληλα πολλαπλάσια κάθε γραμμής στις πάνω από αυτήν γραμμές για να πάρουμε μηδενικά πάνω από τα αρχικά 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Προσθέσαμε 7/2 φορές την τρίτη γραμμή του προηγούμενου πίνακα στη δεύτερη γραμμή.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Προσθέσαμε -6 φορές την τρίτη γραμμή στην πρώτη γραμμή.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Προσθέσαμε 5 φορές τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη γραμμή.

Ο τελευταίος πίνακας είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. $\triangle$

Η παραπάνω διαδικασία αναγωγής ενός πίνακα στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του ονομάζεται ***απαλοιφή Gauss-Jordan***. Αν χρησιμοποιήσουμε μόνο τα πέντε πρώτα βήματα, τότε παίρνουμε την κλιμακωτή μορφή και η διαδικασία ονομάζεται ***απαλοιφή Gauss***.

Παράδειγμα 3 Να λυθεί με απαλοιφή Gauss-Jordan το

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & & + & 2x_5 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 4x_5 & - & 3x_6 & = & -1 \\ & & & & 5x_3 & + & 10x_4 & & & + & 15x_6 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & & & + & 8x_4 & + & 4x_5 & + & 18x_6 & = & 6 \end{array}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Προσθέτοντας -2 φορές την πρώτη γραμμή στην δεύτερη και την τέταρτη γραμμή παίρνουμε τον

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας την δεύτερη γραμμή με -1 και μετα προσθέτοντας -5 φορές την δεύτερη γραμμή στην τρίτη γραμμή και -4 φορές την δεύτερη γραμμή στην τέταρτη γραμμή παίρνουμε τον

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Εναλλάσοντας την τρίτη και την τέταρτη γραμμή και μετά πολλαπλασιάζοντας την τρίτη γραμμή του πίνακα που προκύπτει με 1/6 παίρνουμε την κλιμακωτή μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Προσθέτοντας -3 φορές την τρίτη γραμμή στη δεύτερη γραμμή και μετα προσθέτοντας 2 φορές την δεύτερη γραμμή του πίνακα που προκύπτει στην πρώτη γραμμή παίρνουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων είναι το

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 3x_2 & & & + & 4x_4 & + & 2x_5 & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & & & & & = & 0 \\ & & & & & & & & & & x_6 & = & \frac{1}{3} \end{array}$$

(Παραλείψαμε την τελευταία εξίσωση $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 0$, εφόσον θα ικανοποιείται αυτόματα από τις λύσεις των υπόλοιπων εξισώσεων.) Λύνοντας ως προς τις βασικές μεταβλητές παίρνουμε

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & - & 3x_2 & - & 4x_4 & - & 2x_5 \\ x_3 & = & - & 2x_4 & & & & \\ x_6 & = & \frac{1}{3} & & & & & \end{array}$$

Αν δώσουμε στις ελεύθερες μεταβλητές x_2, x_4 και x_5 τις αυθαίρετες τιμές r, s και t αντίστοιχα, τότε η γενική λύση δίνεται από τους τύπους

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \frac{1}{3}$$

Παράδειγμα 4 Κάποιες φορές είναι προτιμότερο να λύσουμε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων χρησιμοποιώντας απαλοιφή Gauss για να πάρουμε την κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα, χωρίς να σύνεχίσουμε για να βρούμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Όταν κάνουμε κάτι τέτοιο το αντίστοιχο σύστημα λύνεται με μία τεχνική η οποία ονομάζεται ***προς τα πίσω αντικατάσταση***. Θα χρησιμοποιήσουμε το σύστημα του Παραδείγματος 3 για να δείξουμε πώς δουλεύει η μέθοδος αυτή.

ΠΡΟΣ ΤΑ ΠΙΣΩ ΑΝΤΙΚΑΤΑ-ΣΤΑΣΗ

Από τους υπολογισμούς του Παραδείγματος 3 η κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα είναι η

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Για να λύσουμε το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & & + & 2x_5 & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & & & + & 3x_6 & = & 1 \\ & & & & & & & & & & x_6 & = & \frac{1}{3} \end{array}$$

προχωράμε ως εξής:

Βήμα 1ο. Λύνουμε τις εξισώσεις ως προς τις βασικές μεταβλητές.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 & = & 1 - 2x_4 - 3x_6 \\ x_6 & = & \frac{1}{3} \end{array}$$

Βήμα 2ο. Αρχίζοντας από την τελευταία εξίσωση και δουλεύοντας προς τα πάνω, αντικαθιστούμε διαδοχικά κάθε εξίσωση σε όλες τις εξισώσεις που βρίσκονται πάνω από αυτήν.

Αντικαθιστώντας $x_6 = \frac{1}{3}$ στην δεύτερη εξίσωση παίρνουμε

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 & = & -2x_4 \\ x_6 & = & \frac{1}{3} \end{array}$$

Αντικαθιστώντας $x_3 = -2x_4$ στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 & = & -2x_4 \\ x_6 & = & \frac{1}{3} \end{array}$$

Βήμα 3ο. Δίνουμε αυθαίρετες τιμές στις ελεύθερες μεταβλητές, εφόσον υπάρχουν.

Αν δώσουμε στις ελεύθερες μεταβλητές x_2, x_4 και x_5 τις αυθαίρετες τιμές r, s και t αντίστοιχα, τότε η γενική λύση δίνεται από τους τύπους

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \frac{1}{3}$$

Βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με αυτό του Παραδείγματος 3. $\triangle$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Οι αυθαίρετες τιμές που δίνουμε στις ελεύθερες μεταβλητές συχνά ονομάζονται ***παράμετροι***. Παρότι γενικά θα χρησιμοποιούμε τα γράμματα r, s, t, $\ldots$ για τις παραμέτρους, οποιαδήποτε γράμματα τα οποία δεν έρχονται σε αντίθεση με τα ονόματα των μεταβλητών μπορούν να χρησιμοποιηθούν.

Παράδειγμα 5 Να λυθεί το

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array}$$

με απαλοιφή Gauss και προς τα πίσω αντικατάσταση.

Λύση. Αυτό είναι το σύστημα του Παραδείγματος 3 της Ενότητας 1.1. Στο παράδειγμα αυτό μετατρέψαμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

στην κλιμακωτή μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα το οποίο αντίστοιχεί σε αυτόν τον πίνακα είναι το

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & y & - & \frac{7}{2}z & = & -\frac{17}{2} \\ & & & & z & = & 3 \end{array}$$

Λύνοντας ως προς τις βασικές μεταβλητές παίρνουμε

$$\begin{array}{rcl} x & = & 9 - y - 2z \\ y & = & -\frac{17}{2} + \frac{7}{2}z \\ z & = & 3 \end{array}$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία εξίσωση στις από πάνω της παίρνουμε

$$\begin{array}{rcl} x & = & 3 - y \\ y & = & 2 \\ z & = & 3 \end{array}$$

και αντικαθιστώντας την δεύτερη εξίσωση στην πρώτη παίρνουμε

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 2 \\ z & = & 3 \end{array}$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι το ίδιο με αυτό που βρήκαμε στο Παράδειγμα 3 της Ενότητας 1.1 με απαλοιφή Gauss-Jordan. $\triangle$

Οι διαδικασίες που δώσαμε για την αναγωγή ενός πίνακα σε κλιμακωτή μορφή και ανηγμένη κλιμακωτή μορφή μπορούν να χρησιμοποιηθούν για υπολογισμούς με υπολογιστή γιατί είναι συστηματικές. Από την άλλη στις διαδικασίες αυτές εμφανίζονται μερικές φορές κλάσματα, πράγμα που μπορεί να αποφευχθεί αν αλλάξουμε τη σειρά των βημάτων με σωστό τρόπο. Έτσι, όταν ο αναγνώστης έχει μάθει καλά να χρησιμοποιεί τη βασική διαδικασία, μπορεί να προσπαθήσει σε συγκεκριμένα προβλήματα να αλλάξει τη σειρά των βημάτων για να αποφύγει τα κλάσματα (βλ. Άσκηση 15).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Μπορεί να αποδειχθεί, παρότι δεν θα το κάνουμε εδώ, ότι *κάθε πίνακας έχει μοναδική ανηγμένη κλιμακωτή μορφή*, δηλαδή για έναν συγκεκριμένο πίνακα με όποιον τρόπο κι αν εφαρμόσουμε τις στοιχειώδεις διαδικασίες γραμμών φτάνουμε πάντα στην ίδια ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Αντίθετα *η κλιμακωτή μορφή ενός πίνακα δεν είναι μοναδική*. Αλλάζοντας τη σειρά των στοιχειωδών διαδικασιών γραμμών μπορεί να καταλήξουμε σε διαφορετική κλιμακωτή μορφή (βλ. Άσκηση 16). Για το λόγο αυτό μιλάμε για *την* ανηγμένη κλιμακωτή μορφή ενός πίνακα και για *μία* κλιμακωτή μορφή.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Οι περισσσότεροι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται από υπολογιστές για τη λύση συστημάτων χρησιμοποιούν την απαλοιφή Gauss και όχι την απαλοιφή Gauss-Jordan. Επίσης η βασική διαδικασία συχνά τροποποιείται με πολλούς διαφορετικούς τρόπους ώστε να ελαττωθούν τα σφάλματα κατά τη στρογγυλοποίηση, να ελαχιστοποιηθεί ο απαραίτητος χώρος αποθήκευσης και να μεγιστοποιηθεί η ταχύτητα. Για παράδειγμα πολλοί τέτοιοι αλγόριθμοι δεν κανονικοποιούν το βασικό στοιχείο κάνοντάς το ίσο με 1.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 1.2

1. Ποιοι από τους παρακάτω 3×3 πίνακες είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή;

$$\text{(α)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(β)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(γ)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(δ)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(ε)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(στ)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(ζ)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(η)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(ϑ)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Ποιοι από τους παρακάτω 3×3 πίνακες είναι σε κλιμακωτή μορφή;

$$\text{(α)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(β)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(γ)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(δ)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(ε)} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(στ)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Για κάθε έναν από τους παρακάτω πίνακες εξετάστε αν είναι σε κλιμακωτή μορφή, σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, και στις δύο ή σε καμία από τις δύο.

$$\text{(α)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(β)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{(γ)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{(δ)} \begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(ε)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(στ)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Για κάθε έναν από τους παρακάτω πίνακες υποθέστε ότι ο επαυξημένος πίνακας ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων έχει αναχθεί με διαδικασίες γραμμών σε αυτή την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Λύστε το σύστημα.

$$\text{(α)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{(β)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{(γ)} \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(δ)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Για κάθε έναν από τους παρακάτω πίνακες υποθέστε ότι ο επαυξημένος πίνακας ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων έχει αναχθεί με διαδικασίες γραμμών σε αυτή την κλιμακωτή μορφή. Λύστε το σύστημα.

(α) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(γ) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (δ) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Να λυθεί το κάθε ένα από τα παρακάτω συστήματα με απαλοιφή Gauss-Jordan.

(α) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \end{array}$

(β) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 8x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & -1 \end{array}$

(γ) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & - & w & = & -1 \\ 2x & + & y & - & 2z & - & 2w & = & -2 \\ -x & + & 2y & - & 4z & + & w & = & 1 \\ 3x & & & & & - & 3w & = & -3 \end{array}$

(δ) $\begin{array}{rcrcrcr} & - & 2b & + & 3c & = & 1 \\ 3a & + & 6b & - & 3c & = & -2 \\ 6a & + & 6b & + & 3c & = & 5 \end{array}$

7. Να λυθεί το κάθε ένα από τα συστήματα της Άσκησης 6 με απαλοιφή Gauss.

8. Να λυθεί το κάθε ένα από τα παρακάτω συστήματα με απαλοιφή Gauss-Jordan.

(α) $\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & = & -2 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \end{array}$

(β) $\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -15 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \\ -6x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 30 \end{array}$

(γ) $\begin{array}{rcrcr} 4x_1 & - & 8x_2 & = & 12 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & = & 9 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & = & -6 \end{array}$

(δ) $\begin{array}{rcrcrcrcr} & - & 10y & - & 4z & + & w & = & 1 \\ x & + & 4y & - & z & + & w & = & 2 \\ 3x & + & 2y & + & z & + & 2w & = & 5 \\ -2x & - & 8y & + & 2z & - & 2w & = & -4 \\ x & - & 6y & + & 3z & & & = & 1 \end{array}$

9. Να λυθεί το κάθε ένα από τα συστήματα της Άσκησης 8 με απαλοιφή Gauss.

10. Να λυθεί το κάθε ένα από τα παρακάτω συστήματα με απαλοιφή Gauss-Jordan.

(α) $\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}$

(β) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & 12x_2 & - & 11x_3 & - & 16x_4 & = & 5 \end{array}$

(γ) $\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & & & w & + & 2x & - & y & = & 7 \\ & & & & & & x & - & y & = & 3 \\ & & & & w & + & 3x & - & 2y & = & 7 \\ 2u & + & 4v & + & w & + & 7x & & & = & 7 \end{array}$

11. Να λυθεί το κάθε ένα από τα συστήματα της Άσκησης 10 με απαλοιφή Gauss.

12. Λύστε το παρακάτω σύστημα με όποια μέθοδο θέλετε.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2I_1 & - & I_2 & + & 3I_3 & + & 4I_4 & = & 9 \\ I_1 & & & - & 2I_3 & + & 7I_4 & = & 11 \\ 3I_1 & - & 3I_2 & + & I_3 & + & 5I_4 & = & 8 \\ 2I_1 & + & I_2 & + & 4I_3 & + & 4I_4 & = & 10 \end{array}$$

13. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα αν a, b και c είναι σταθερές.

(α) $$\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & a \\ 3x & + & 6y & = & b \end{array}$$

(β) $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 = & a \\ 2x_1 & & & + & 2x_3 = & b \\ & & 3x_2 & + & 3x_3 = & c \end{array}$$

14. Για ποιες τιμές του a δεν έχει το παρακάτω σύστημα καμία λύση; Ακριβώς μία λύση; Άπειρες λύσεις;

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ 3x & - & y & + & 5z & = & 2 \\ 4x & + & y & + & (a^2-14)z & = & a+2 \end{array}$$

15. Να αναχθεί ο

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή χωρίς να εμφανιστούν κλάσματα.

16. Βρείτε δύο κλιμακωτές μορφές του

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

17. Να λυθεί το ακόλουθο σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τις γωνίες α, β και γ, όπου $0 \le \alpha \le 2\pi$, $0 \le \beta \le 2\pi$ και $0 \le \gamma < \pi$.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\sin\alpha & - & \cos\beta & + & 3\tan\gamma & = & 3 \\ 4\sin\alpha & + & 2\cos\beta & - & 2\tan\gamma & = & 2 \\ 6\sin\alpha & - & 3\cos\beta & + & \tan\gamma & = & 9 \end{array}$$

18. Να λυθεί το ακόλουθο σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τα x, y και z.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & 6 \\ x^2 & - & y^2 & + & 2z^2 & = & 2 \\ 2x^2 & + & y^2 & - & z^2 & = & 3 \end{array}$$

19. Στο Σχήμα 1 δίνετε το γράφημα της καμπύλης με εξίσωση

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

η οποία διέρχεται από τα σημεία $(0, 10)$, $(1, 7)$, $(3, -11)$, $(4, -14)$. Να βρεθούν οι συντελεστές a, b, c και d.

20. Να περιγραφούν οι πιθανές ανηγμένες κλιμακωτές μορφές του πίνακα

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

21. Δείξτε ότι αν $ad - bc \neq 0$, τότε η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{είναι} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

22. Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 21 για να δείξετε ότι αν $ad-bc \neq 0$, τότε το σύστημα

$$\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & k \\ cx & + & dy & = & l \end{array}$$

έχει ακριβώς μία λύση.

1.3 Ομογενή Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Όπως έχουμε ήδη πει κάθε σύστημα γραμμικών εξισώσεων είτε έχει μία λύση, είτε έχει άπειρες λύσεις, είτε δεν έχει καμία λύση. Καθώς θα προχωράμε θα υπάρξουν περιπτώσεις στις οποίες δεν θα ενδιαφερόμαστε να βρούμε τις λύσεις ενός συγκεκριμένου συστήματος, αλλά θα μας απασχολεί το πλήθος των λύσεων του συστήματος αυτού. Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε γραμμικά συστήματα για τα οποία είναι εύκολο να καταλήξουμε σε συμπεράσματα για το πλήθος των λύσεών τους.

Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων ονομάζεται ***ομογενές*** αν όλοι οι σταθεροί όροι είναι μηδέν, δηλαδή αν το σύστημα είναι της μορφής

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

Κάθε ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων είναι συμβιβαστό, εφόσον όλα τα συστήματα αυτού του είδους έχουν τη λύση $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Η λύση αυτή ονομάζεται ***τετριμμένη λύση***. Αν υπάρχουν άλλες λύσεις, τότε θα ονομάζονται ***μη τετριμμένες λύσεις***.

Εφόσον τα ομογενή συστήματα γραμμικών εξισώσεων είναι συμβιβαστά, έχουν είτε μία λύση είτε άπειρες λύσεις. Εφόσον μία από αυτές τις λύσεις είναι η τετριμμένη λύση, μπορούμε να πούμε τα εξής.

Για ένα ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων ένα ακριβώς από τα παρακάτω είναι αλήθεια:

1. *Το σύστημα έχει μόνο την τετριμμένη λύση.*
2. *Το σύστημα έχει άπειρες μη τετριμμένες λύσεις και την τετριμμένη λύση.*

Υπάρχει μία περίπτωση στην οποία ένα ομογενές σύστημα έχει σίγουρα μη τετριμμένες λύσεις. Αυτό συμβαίνει όταν το σύστημα έχει περισσότερους αγνώστους από εξισώσεις. Για να δούμε γιατί, ας θεωρήσουμε το παρακάτω παράδειγμα τεσσάρων εξισώσεων με πέντε αγνώστους.

Παράδειγμα 1 Να λυθεί το παρακάτω ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων με απαλοιφή Gauss-Jordan.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array} \tag{1}$$

Λύση. Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ανάγοντας τον πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή παίρνουμε τον

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων είναι το

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & & & + & x_5 & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & & & = & 0 \end{array} \tag{2}$$

Λύνοντας ως προς τις βασικές μεταβλητές παίρνουμε

$$\begin{array}{rcrr} x_1 & = & -x_2 & -x_5 \\ x_3 & = & -x_5 & \\ x_4 & = & 0 & \end{array}$$

Άρα η γενική λύση είναι

$$x_1 = -s - t, \qquad x_2 = s, \qquad x_3 = -t, \qquad x_4 = 0, \qquad x_5 = t$$

Παρατηρούμε ότι για $s = t = 0$ παίρνουμε την τετριμμένη λύση. $\triangle$

Το Παράδειγμα 1 ξεκαθαρίζει δύο στοιχεία τα οποία είναι σημαντικά για τη λύση ενός ομογενούς συστήματος γραμμικών εξισώσεων. Πρώτο: καμία από τις τρεις στοιχειώδεις διαδικασίες δεν μπορεί να αλλάξει την τελευταία στήλη του επαυξημένου πίνακα η οποία αποτελείται από μηδενικά. Για το λόγο αυτό το σύστημα εξισώσεων το οποίο αντιστοιχεί στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα πρέπει να είναι επίσης ομογενές [βλ. σύστημα (2)]. Δεύτερο: ανάλογα με το αν η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα έχει μηδενικές γραμμές, το πλήθος των εξισώσεων στο ανηγμένο σύστημα είναι το ίδιο ή μικρότερο από το πλήθος των εξισώσεων στο αρχικό σύστημα [συγκρίνετε τα συστήματα (1) και (2)]. Άρα αν το δοθέν ομογενές σύστημα έχει m εξισώσεις με n αγνώστους με $m < n$, και στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα υπάρχουν r μη μηδενικές γραμμές, θα έχουμε $r < n$. Επομένως το σύστημα εξισώσεων το οποίο αντιστοιχεί στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα θα είναι της μορφής

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & x_{k_1} & & & & + & \sum(\ ) & = & 0 \\
 & \cdots & x_{k_2} & & & + & \sum(\ ) & = & 0 \\
 & & \cdots & & & & \vdots & & \\
 & & & \ddots & & & \vdots & & \\
 & & & & x_{k_r} & + & \sum(\ ) & = & 0
\end{array} \tag{3}$$

όπου οι x_{k_1}, x_{k_2},..., x_{k_r} είναι οι βασικές μεταβλητές και τα $\sum(\quad)$ συμβολίζουν αθροίσματα (πιθανά όλα διαφορετικα) των $n - r$ ελεύθερων μεταβλητών. Λύνοντας ως προς τις βασικές μεταβλητές παίρνουμε

$$\begin{array}{rcl}
x_{k_1} & = & -\sum(\ ) \\
x_{k_2} & = & -\sum(\ ) \\
\vdots & & \\
x_{k_r} & = & -\sum(\ )
\end{array}$$

Όπως στο Παράδειγμα 1, μπορούμε να δώσουμε αυθαίρετες τιμές στις ελεύθερες μεταβλητές στο δεξιό μέλος και έτσι να πάρουμε άπειρες λύσεις για το σύστημα.

Ανακεφαλαιώνοντας παίρνουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.3.1 Ένα ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων με περισσότερους αγνώστους από εξισώσεις έχει άπειρες λύσεις.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Το Θεώρημα 1.3.1 ισχύει μόνο για ομογενή συστήματα. Ένα μη ομογενές σύστημα με περισσότερους αγνώστους από εξισώσεις δεν είναι πάντα συμβιβαστό (Άσκηση 12). Όμως αν είναι συμβιβαστό, τότε θα έχει άπειρες λύσεις. Αυτό θα αποδειχθεί αργότερα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 1.3

1. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε χαρτί και μολύβι προσδιορίστε ποια από τα παρακάτω ομογενή συστήματα έχουν μη τετριμμένες λύσεις.

(α) $$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 7x_1 & + & x_2 & - & 8x_3 & + & 9x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

(β) $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & 8x_3 & = & 0 \\ & & & & 4x_3 & = & 0 \end{array}$$

(γ) $$\begin{array}{rcrcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & 0 \end{array}$$

(δ) $$\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & = & 0 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & = & 0 \end{array}$$

2. Να λυθούν τα παρακάτω ομογενή συστήματα γραμμικών εξισώσεων με οποιαδήποτε μέθοδο.

(α) $$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

(β) $$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 5x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

(γ) $$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & 2x & + & 2y & + & 4z & = & 0 \\ w & & & - & y & - & 3z & = & 0 \\ 2w & + & 3x & + & y & + & z & = & 0 \\ -2w & + & x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \end{array}$$

3. Να λυθούν τα παρακάτω ομογενή συστήματα γραμμικών εξισώσεων με οποιαδήποτε μέθοδο.

(α) $$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & 3z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \\ x & + & y & + & 4z & = & 0 \end{array}$$

(β) $$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & v & + & 3w & - & 2x & = & 0 \\ 2u & + & v & - & 4w & + & 3x & = & 0 \\ 2u & + & 3v & + & 2w & - & x & = & 0 \\ -4u & - & 3v & + & 5w & - & 4x & = & 0 \end{array}$$

(γ) $$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & & = & 0 \\ & - & 2x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

4. Λύστε για τα Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 και Z_5.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} & & & & Z_3 & + & Z_4 & + & Z_5 & = & 0 \\ -Z_1 & - & Z_2 & + & 2Z_3 & - & 3Z_4 & + & Z_5 & = & 0 \\ Z_1 & + & Z_2 & - & 2Z_3 & & & - & Z_5 & = & 0 \\ 2Z_1 & + & 2Z_2 & - & Z_3 & & & + & Z_5 & = & 0 \end{array}$$

5. Δείξτε ότι το ακόλουθο μη γραμμικό σύστημα έχει δεκαοκτώ λύσεις αν $0 \le \alpha \le 2\pi$, $0 \le \beta \le 2\pi$ και $0 \le \gamma \le 2\pi$.

$$\begin{array}{rcrcrcl} \sin\alpha & + & 2\cos\beta & + & 3\tan\gamma & = & 0 \\ 2\sin\alpha & + & 5\cos\beta & + & 3\tan\gamma & = & 0 \\ -\sin\alpha & - & 5\cos\beta & + & 5\tan\gamma & = & 0 \end{array}$$

6. Για ποια τιμή (τιμές) του λ έχει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων μη τετριμμένες λύσεις;

$$\begin{array}{rcrcl} (\lambda-3)x & + & y & = & 0 \\ x & + & (\lambda-3)y & = & 0 \end{array}$$

7. Θεωρήστε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & 0 \\ cx & + & dy & = & 0 \\ ex & + & fy & = & 0 \end{array}$$

Εξετάστε τις σχετικές θέσεις των ευθειών $ax + by = 0$, $cx + dy = 0$ και $ex + fy = 0$ όταν

(α) το σύστημα έχει μόνο την τετριμμένη λύση

(β) το σύστημα έχει μη τετριμμένες λύσεις

8. Γνωρίζουμε από τη γεωμετρία ότι τρία σημεία του επιπέδου τα οποία δεν βρίσκονται όλα σε μία ευθεία γραμμή ορίζουν έναν μοναδικό κύκλο. Γνωρίζουμε επίσης ότι κάθε κύκλος στο επίπεδο xy έχει μία εξίσωση της μορφής

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$$

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου του Σχήματος 1 ο οποίος διέρχεται από τα σημεία $(-4, 5)$, $(-2, 7)$, $(4, -3)$.

Σχήμα 1

9. Θεωρήστε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & 0 \\ cx & + & dy & = & 0 \end{array}$$

(α) Δείξτε ότι αν $x = x_0$, $y = y_0$ είναι μία λύση του συστήματος και k είναι μία σταθερά, τότε η $x = kx_0$, $y = ky_0$ είναι επίσης μία λύση.

(β) Δείξτε ότι αν οι $x = x_0$, $y = y_0$ και $x = x_1$, $y = y_1$ είναι δύο λύσεις του συστήματος, τότε η $x = x_0 + x_1$, $y = y_0 + y_1$ είναι επίσης μία λύση.

10. Θεωρήστε τα συστήματα εξισώσεων

$$\text{(I)} \quad \begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & k \\ cx & + & dy & = & l \end{array} \qquad \text{(II)} \quad \begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & 0 \\ cx & + & dy & = & 0 \end{array}$$

(α) Δείξτε ότι αν οι $x = x_1$, $y = y_1$ και $x = x_2$, $y = y_2$ είναι λύσεις του (I), τότε η $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$ είναι μία λύση του (II).

(β) Δείξτε ότι αν η $x = x_1$, $y = y_1$ είναι μία λύση του (I) και η $x = x_0$, $y = y_0$ είναι μία λύση του (II), τότε η $x = x_1 + x_0$, $y = y_1 + y_0$ είναι μία λύση του (I).

11. (α) Στο σύστημα εξισώσεων (3) εξηγήστε γιατί θα ήταν λάθος να χρησιμοποιούσαμε τα σύμβολα x_1, x_2,..., x_r για τις βασικές μεταβλητές αντί για τα x_{k_1}, x_{k_2},..., x_{k_r} τα οποία χρησιμοποιήσαμε.

(β) Το σύστημα (2) είναι μία ειδική περίπτωση του (3). Ποια είναι η τιμή του r στην περίπτωση αυτή; Ποια είναι τα x_{k_1}, $x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$ στην περίπτωση αυτή; Γράψτε τα αθροίσματα τα οποία στο (3) συμβολίζονται με $\sum(\ )$.

12. Να βρεθεί ένα μη συμβιβαστό σύστημα γραμμικών εξισώσεων με περισσότερους αγνώστους από εξισώσεις.

1.4 Πίνακες και πράξεις μεταξύ πινάκων

Ορθογώνιες διευθετήσεις πραγματικών αριθμών δεν εμφανίζονται μόνο στους επαυξημένους πίνακες γραμμικών συστημάτων, αλλά και σε πολλές άλλες περιπτώσεις. Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τέτοιες διευθετήσεις αριθμών και θα συζητήσουμε κάποιες από τις ιδιότητες τους που θα μας χρειαστούν αργότερα.

ΟΡΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ορισμός. Ένας ***πίνακας*** είναι μία ορθογώνια διευθέτηση αριθμών. Οι αριθμοί στη διευθέτηση αυτή ονομάζονται ***στοιχεία*** του πίνακα.

Παράδειγμα 1 Οι παρακάτω είναι πίνακες.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \pi & e \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \quad \triangle$$

Οι πίνακες διαφέρουν μεταξύ τους σε διαστάσεις. Οι ***διαστάσεις*** ενός πίνακα περιγράφονται από τον αριθμό των ***γραμμών*** (οριζόντιες γραμμές) και των ***στηλών*** (κατακόρυφες γραμμές) του πίνακα. Ο πρώτος πίνακας του Παραδείγματος 1 έχει 3 γραμμές και 2 στήλες και άρα οι διαστάσεις του είναι 3 επί 2 (το οποίο γράφεται 3×2). Ο πρώτος αριθμός δηλώνει το πλήθος των γραμμών και ο δεύτερος δηλώνει το πλήθος των στηλών. Επομένως οι υπόλοιποι πίνακες του Παραδείγματος 1 έχουν διαστάσεις 1×4, 3×3, 2×1 και 1×1 αντίστοιχα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Συνήθως δεν γράφουμε τις αγκύλες σε έναν 1×1 πίνακα. Έτσι μπορούμε να γράφουμε 4 αντί για $\begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$. Παρότι αυτό δεν μας επιτρέπει να καταλάβουμε αν 4 σημαίνει τον αριθμό τέσσερα ή τον 1×1 πίνακα με στοιχείο το τέσσερα, αυτό σπάνια προκαλεί προβλήματα, αφού συνήθως είναι εύκολο να καταλάβουμε από τα συμφραζόμενα τι σημαίνει το 4.

Θα χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα για να συμβολίζουμε πίνακες και πεζά για να συμβολίζουμε αριθμητικές ποσότητες. Δηλαδή θα γράφουμε

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Όταν μιλάμε για πίνακες συνήθως ονομάζουμε τις αριθμητικές ποσότητες ***βαθμωτά***. Μέχρι το Κεφάλαιο 10 *όλα τα βαθμωτά είναι πραγματικοί αριθμοί*.

Αν ο A είναι ένας πίνακας θα συμβολίζουμε με a_{ij} το στοιχείο το οποίο βρίσκεται στην i γραμμή και την j στήλη του A. Επομένως η γενική μορφή ενός 3×4 πίνακα είναι

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Συνήθως θα χρησιμοποιούμε το ίδιο γράμμα για να συμβολίσουμε έναν πίνακα και τα στοιχεία του. Δηλαδή για έναν πίνακα B θα χρησιμοποιούμε b_{ij} για το στοιχείο το οποίο βρίσκεται στην i γραμμή και την j στήλη του B. Η γενική μορφή ενός $m \times n$ πίνακα είναι

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad [b_{ij}]_{m\times n}$$

Αν δεν είναι σημαντικό να δώσουμε έμφαση στις διαστάσεις, τότε θα συμβολίζουμε τον πίνακα απλά με $[b_{ij}]$.

Ένας πίνακας A με n γραμμές και n στήλες ονομάζεται ***τετραγωνικός πίνακας τάξης* n**. Θα λέμε ότι τα στοιχεία a_{11}, a_{22},..., a_{nn} βρίσκονται στην ***κύρια διαγώνιο*** του A (δες τα έντονα στοιχεία στο Σχήμα 1).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \mathbf{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Σχήμα 1

Ένας τετραγωνικός πίνακας στον οποίο όλα τα στοιχεία *εκτός* της κύριας διαγωνίου είναι μηδέν ονομάζεται ***διαγώνιος πίνακας***. Μερικά παραδείγματα είναι οι

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΙΝΑΚΩΝ

Μέχρι τώρα, χρησιμοποιήσαμε τους πίνακες σα συντομογραφίες κατά την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Για άλλες εφαρμογές πρέπει να αναπτύξουμε μία «αριθμητική πινάκων» στην οποία να μπορούμε να προσθέτουμε και να πολλαπλασιάζουμε πίνακες με έναν τρόπο χρήσιμο για αυτές τις εφαρμογές. Η υπόλοιπη ενότητα είναι αφιερωμένη στην ανάπτυξη αυτής της αριθμητικής.

Θα λέμε ότι δύο πίνακες είναι ***ίσοι*** αν έχουν τίς ίδιες διαστάσεις και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα.

Παράδειγμα 2 Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Έχουμε ότι $A \neq C$, εφόσον οι A και C έχουν διαφορετικές διαστάσεις. Για τον ίδιο λόγο $B \neq C$. Επίσης $A \neq B$, εφόσον τα αντίστοιχα στοιχεία δεν είναι όλα ίσα. $\triangle$

Ορισμός. Αν οι A και B είναι δύο πίνακες με ίδιες διαστάσεις, τότε το ***άθροισμά*** τους $A+B$ είναι ο πίνακας που παίρνουμε αν προσθέσουμε τα αντίστοιχα στοιχεία των δύο πινάκων. Δεν μπορούμε να προσθέσουμε πίνακες με διαφορετικές διαστάσεις.

Παράδειγμα 3 Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Τότε

$$A+B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

ενώ οι $A+C$ και $B+C$ δεν ορίζονται. $\triangle$

Ορισμός. Αν ο A είναι ένας πίνακας και το c είναι ένα βαθμωτό, τότε το ***γινόμενο*** cA είναι ο πίνακας που παίρνουμε αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του A με c.

Παράδειγμα 4 Αν ο A είναι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

τότε

$$2A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad (-1)A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Αν ο B είναι ένας πίνακας, τότε με $-B$ θα συμβολίζουμε το γινόμενο $(-1)B$. Αν οι A και B είναι δύο πίνακες με ίδιες διαστάσεις, τότε ο πίνακας $A-B$ ορίζεται σαν το άθροισμα $A+(-B) = A+(-1)B$. $\triangle$

Παράδειγμα 5 Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Από τους ορισμούς που δώσαμε παραπάνω

$$-B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

και

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να πάρουμε τον $A - B$ αφαιρώντας τα στοιχεία του B από τα αντίστοιχα στοιχεία του A. $\triangle$

Παραπάνω ορίσαμε τον πολλαπλασιασμό ενός πίνακα με ένα βαθμωτό, αλλά δεν έχουμε ορίσει μέχρι τώρα τον πολλαπλασιασμό δύο πινάκων. Εφόσον για να προθέσουμε πίνακες προσθέτουμε τα αντίστοιχα στοιχεία και για να αφαιρέσουμε πίνακες αφαιρούμε τα αντίστοιχα στοιχεία, θα φαινόταν σαν ο πιο φυσικός ορισμός του πολλαπλασιασμού δύο πινάκων ο πολλαπλασιασμός των αντίστοιχων στοιχείων. Παρόλα αυτά προκύπτει ότι ο ορισμός αυτός δεν είναι χρήσιμος στα περισσότερα προβλήματα. Η πείρα οδήγησε τους μαθηματικούς στον παρακάτω ορισμό για τον πολλαπλασιασμό πινάκων, ο οποίος παρότι είναι λιγότερο φυσιολογικός είναι ιδιαίτερα χρήσιμος.

Ορισμός. Αν ο A είναι ένας $m \times r$ πίνακας και ο B είναι ένας $r \times n$ πίνακας, τότε το ***γινόμενο*** AB είναι ο $m \times n$ πίνακας τού οποίου τα στοιχεία προσδιορίζονται με τον ακόλουθο τρόπο: Για να βρούμε το στοιχείο το οποίο βρίσκεται στην i γραμμή και την j στήλη του AB ξεχωρίζουμε την i γραμμή του A και την j στήλη του B. Κατόπιν πολλαπλασιαζουμε τα αντίστοιχα στοιχεία της γραμμής και της στήλης και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύψανε.

Παράδειγμα 6 Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Εφόσον ο A είναι ένας 2×3 και ο B είναι ένας 3×4, το γινόμενο AB είναι ένας 2×4 πίνακας. Για να προσδιορίσουμε, για παράδειγμα, το στοιχείο που βρίσκεται στην 2η γραμμή και την 3η στήλη του AB, ξεχωρίζουμε την 2η γραμμή του A και την 3η στήλη του B. Μετά, όπως φαίνεται παρακάτω, πολλαπλασιάζουμε τα αντίστοιχα στοιχεία τους και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & 26 & \star \end{bmatrix}$$

$$\boxed{(2 \cdot 4) + (6 \cdot 3) + (0 \cdot 5) = 26}$$

Το στοιχείο στην 1η γραμμή και την 4η στήλη του AB υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \star & \star & \star & 13 \\ \star & \star & \star & \star \end{bmatrix}$$

$$\boxed{(1 \cdot 3) + (2 \cdot 1) + (4 \cdot 2) = 13}$$

Οι υπολογισμοί που μας δίνουν τα υπόλοιπα στοιχεία είναι οι ακόλουθοι

$$\begin{array}{rcr} (1 \cdot 4) + (2 \cdot 0) + (4 \cdot 2) & = & 12 \\ (1 \cdot 1) - (2 \cdot 1) + (4 \cdot 7) & = & 27 \\ (1 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (4 \cdot 5) & = & 30 \\ (2 \cdot 4) + (6 \cdot 0) + (0 \cdot 2) & = & 8 \\ (2 \cdot 1) - (6 \cdot 1) + (0 \cdot 7) & = & -4 \\ (2 \cdot 3) + (6 \cdot 1) + (0 \cdot 2) & = & 12 \end{array} \qquad AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

Ο ορισμός του πολλαπλασιασμού πινάκων απαιτεί ο αριθμός των στηλών του πρώτου παράγοντα A να είναι ο ίδιος με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου παράγοντα B ώστε να μπορεί να σχηματιστεί το γινόμενο AB. Αν η συνθήκη αυτή δεν ικανοποιείται το γινόμενο δεν ορίζεται. Ένας βολικός τρόπος για να εξετάσουμε αν το γινόμενο δύο πινάκων ορίζεται είναι να γράψουμε τις διαστάσεις του πρώτου παράγοντα και στα δεξιά τους να γράψουμε τις διαστάσεις του δεύτερου παράγοντα. Αν, όπως στο Σχήμα 2, οι εσωτερικοί αριθμοί είναι οι ίδιοι, τότε το γινόμενο ορίζεται. Στην περίπτωση αυτή οι εξωτερικοί αριθμοί δίνουν τις διαστάσεις του γινομένου.

$$\begin{array}{ccccccccc} & A & & & & B & & = & AB \\ m & \times & r & & r & \times & n & & m \times n \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\ & & & \text{εσωτερικοί} & & & & & \\ \uparrow & & & & & & \uparrow & & \\ & & & \text{εξωτερικοί} & & & & & \end{array}$$

Σχήμα 2

Παράδειγμα 7 Έστω ότι ο A είναι ένας 3×4 πίνακας, ο B είναι ένας 4×7 πίνακας και ο C είναι ένας 7×3 πίνακας. Τότε ο AB ορίζεται και είναι ένας 3×7 πίνακας, ο CA ορίζεται και είναι ένας 7×4 πίνακας, ο BC ορίζεται και είναι ένας 4×3 πίνακας. Τα γινόμενα AC, CB και BA δεν ορίζονται. $\triangle$

Παράδειγμα 8 Αν ο A είναι ένας $m \times r$ πίνακας και ο B είναι ένας $r \times n$ πίνακας, τότε το στοιχείο στην i γραμμή και την j στήλη του AB δίνεται από τον τύπο

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix}$$

$\triangle$

ΠΙΝΑΚΩΤΗ ΜΟΡΦΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων έχει μία σημαντική εφαρμογή στα συστήματα γραμμικών εξισώσεων. Θεωρούμε ένα σύστημα m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Εφόσον δύο πίνακες είναι ίσοι αν και μόνο αν τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα μπορούμε να αντικαστήσουμε τις m εξισώσεις στο σύστημα με μία μοναδική εξίσωση πινάκων, την

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ο $m \times 1$ πίνακας στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης αυτής μπορεί να γραφτεί σαν γινόμενο και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Αν ονομάσουμε τους πίνακες αυτούς A, X και B αντίστοιχα, τότε το αρχικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους αντικαθίσταται από μία μοναδική εξίσωση πινάκων, την

$$AX = B \tag{1}$$

Παρακάτω θα προσπαθήσουμε να βρούμε τρόπους για να λύσουμε εξισώσεις πινάκων όπως αυτή για τον άγνωστο πίνακα X. Λόγω αυτού του νέου τρόπου αντιμετώπισης θα πάρουμε καινούριες μεθόδους για τη λύση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Ο πίνακας A στην (1) ονομάζεται ***πίνακας συντελεστών*** του συστήματος.

Παράδειγμα 9 Σε κάποιες περιπτώσεις είναι χρήσιμο να μπορούμε να βρούμε μία συγκεκριμένη γραμμή ή στήλη στο γινόμενο AB χωρίς να υπολογίσουμε ολόκληρο το γινόμενο. Αφήνεται σαν άσκηση να αποδείξετε ότι τα στοιχεία της j στήλης του AB είναι τα στοιχεία του γινομένου AB_j, όπου ο B_j είναι ο πίνακας που σχηματίζεται χρησιμοποιώντας μόνο την j στήλη του B. Έτσι αν οι A και B είναι οι πίνακες του Παραδείγματος 6, η δεύτερη στήλη του γινομένου AB υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ **Δεύτερη στήλη του B** $\qquad$ $\uparrow$ **Δεύτερη στήλη του AB**

Όμοια τα στοιχεία της i γραμμής του AB είναι τα στοιχεία του γινομένου A_iB, όπου ο A_i είναι ο πίνακας που σχηματίζεται χρησιμοποιώντας μόνο την i γραμμή του A. Έτσι η πρώτη γραμμή του γινομένου AB του Παραδείγματος 6, υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ **Πρώτη γραμμή του A** $\qquad$ $\uparrow$ **Πρώτη γραμμή του AB**

$\triangle$

Τελειώνουμε την ενότητα αυτή με τον ορισμό δύο πράξεων πινάκων για τις οποίες δεν υπάρχει αντίστοιχο στους πραγματικούς αριθμούς.

ΑΝΑ-ΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑ

Ορισμός. Αν ο A είναι ένας $m \times n$ πίνακας, τότε ο ***ανάστροφος του* A** συμβολίζεται με A^t και ορίζεται ως ο $n \times m$ πίνακας του οποίου η πρώτη στήλη είναι η πρώτη γραμμή του A, η δεύτερη στήλη είναι η δεύτερη γραμμή του A, η τρίτη στήλη είναι η τρίτη γραμμή του A και τα λοιπά.

Παράδειγμα 10 Παρακάτω δίνουμε μερικά παραδείγματα πινάκων και των αναστρόφων τους.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad C^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \qquad D^t = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \qquad E^t = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

$\triangle$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Παρατηρήστε ότι όχι μόνο είναι οι στήλες του A^t οι γραμμές του A, αλλά και οι γραμμες του A^t είναι οι στήλες του A.

Ορισμός Αν ο A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, τότε το ***ίχνος του*** $\mathbf{A}$ συμβολίζεται με $\mathrm{tr}(A)$ και ορίζεται ως το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του A.

Παράδειγμα 11 Παρακάτω δίνουμε μερικά παραδείγματα πινάκων και των ιχνών τους.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{tr}(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 11 \quad \triangle$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 1.4

1. Έστω ότι οι A, B, C, D και E είναι πίνακες με τις ακόλουθες διαστάσεις:

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ (4\times 5) & (4\times 5) & (5\times 2) & (4\times 2) & (5\times 4) \end{array}$$

Να εξεταστεί ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις ορίζονται. Για αυτές που ορίζονται να βρεθούν οι διαστάσεις του πίνακα που προκύπτει.

(α)	BA	(β)	$AC+D$	(γ)	$AE+B$	(δ)	$AB+B$
(ε)	$E(A+B)$	(στ)	$E(AC)$	(ζ)	E^tA	(η)	$(A^t+E)D$

2. Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση πινάκων με αγνώστους τα a, b, c και d.

$$\begin{bmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Θεωρούμε τους παρακάτω πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστούν τα παρακάτω (όπου αυτό είναι δυνατό).

(α)	$D+E$	(β)	$D-E$	(γ)	$5A$	(δ)	$-7C$
(ε)	$2B-C$	(στ)	$4E-2D$	(ζ)	$-3(D+2E)$	(η)	$A-A$
(θ)	$\mathrm{tr}(D)$	(ι)	$\mathrm{tr}(D-3E)$	(ια)	$4\,\mathrm{tr}(7B)$	(ιβ)	$\mathrm{tr}(A)$

4. Χρησιμοποιήστε τους πίνακες της Άσκησης 3 για να υπολογίσετε τα παρακάτω (όπου αυτό είναι δυνατό).

(α)	$2A^t+C$	(β)	D^t-E^t	(γ)	$(D-E)^t$	(δ)	B^t+5C^t
(ε)	$\frac{1}{2}C^t-\frac{1}{4}A$	(στ)	$B-B^t$	(ζ)	$2E^t-3D^t$	(η)	$(2E^t-3D^t)^t$

5. Χρησιμοποιήστε τους πίνακες της Άσκησης 3 για να υπολογίσετε τα παρακάτω (όπου αυτό είναι δυνατό).

(α)	AB	(β)	BA	(γ)	$(3E)D$	(δ)	$(AB)C$
(ε)	$A(BC)$	(στ)	CC^t	(ζ)	$(DA)^t$	(η)	$(C^tB)A^t$
(θ)	$\mathrm{tr}(DD^t)$	(ι)	$\mathrm{tr}(4E^t-D)$	(ια)	$\mathrm{tr}(C^tA^t+2E^t)$		

6. Χρησιμοποιήστε τους πίνακες της Άσκησης 3 για να υπολογίσετε τα παρακάτω (όπου αυτό είναι δυνατό).

(α)	$(2D^t-E)A$	(β)	$(4B)C+2B$	(γ)	$(-AC)^t+5D^t$
(δ)	$(BA^t-2C)^t$	(ε)	$B^t(CC^t-A^tA)$	(στ)	$D^tE^t-(ED)^t$

7. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Παραδείγματος 9 για να βρείτε

(α)	την 1η γραμμή του AB	(β)	την 3η γραμμή του AB	(γ)	την 2η στήλη του AB
(δ)	την 1η στήλη του BA	(ε)	την 3η γραμμή του AA	(στ)	την 3η στήλη του AA

8. Έστω C, D και E οι πίνακες της Άσκησης 3. Χρησιμοποιώντας το μικρότερο δυνατό πλήθος υπολογισμών βρείτε το στοιχείο το οποίο βρίσκεται στη 2η γραμμή και την 3η στήλη του πίνακα $C(DE)$.

9. (α) Δείξτε ότι αν οι AB και BA ορίζονται και οι δύο, τότε οι AB και BA είναι τετραγωνικοί πίνακες.

(β) Δείξτε ότι αν ο A είναι ένας $m \times n$ πίνακας και ο $A(BA)$ ορίζεται, τότε ο B είναι ένας $n \times m$ πίνακας.

10. Να βρεθούν πίνακες A, X και B οι οποίοι να εκφράζουνε το κάθε ένα από τα παρακάτω συστήματα γραμμικών εξισώσεων σαν μία εξίσωση πινάκων $AX = B$.

(α) $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 7 \\ 9x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array}$$

(β) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & & & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & + & x_2 & & & - & 8x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 9x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & = & 2 \end{array}$$

11. Να εκφραστεί κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις πινάκων σαν σύστημα γραμμικών εξισώσεων.

(α) $$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(β) $$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

12. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_m \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_n \end{bmatrix}$$

(α) Να υπολογιστούν τα DA και AE.

(β) Εξετάστε τις γραμμές του DA και τις στήλες του AE και βρείτε δύο απλούς κανόνες για το πώς πολλαπλασιάζουμε έναν πίνακα A με έναν διαγώνιο πίνακα.

(γ) Χρησιμοποίηστε τους κανόνες που βρήκατε στο (β) για να υπολογίσετε τα AB και BA αν

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

13. Δείξτε ότι το γινόμενο διαγώνιων πινάκων είναι διαγώνιος πίνακας. Βρείτε έναν κανόνα για να πολλαπλασιάζετε διαγώνιους πίνακες.

14. (α) Δείξτε ότι αν ο A έχει μία γραμμή που αποτελείται από μηδενικά και ο B είναι οποιοσδήποτε πίνακας για τον οποίο ο AB ορίζεται, τότε και ο AB έχει μία γραμμή που αποτελείται από μηδενικά.

(β) Βρείτε ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα για στήλες που αποτελούνται αποκλειστικά από μηδενικά.

15. Αν a_{ij} είναι το στοιχείο το οποίο βρίσκεται στην i γραμμή και την j στήλη του A, τότε σε ποια γραμμή και σε ποια στήλη του A^t θα εμφανίζεται το a_{ij};

16. Έστω ότι ο A είναι ένας $m \times n$ πίνακας και έστω ότι ο $\mathit{0}$ είναι ο $m \times n$ πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μηδέν. Δείξτε ότι αν $kA = \mathit{0}$, τότε είτε $k = 0$ είτε $A = \mathit{0}$.

17. Έστω ότι ο I είναι ο $m \times n$ πίνακας του οποίου το στοιχείο το οποίο βρίσκεται στην i γραμμή και την j στήλη είναι

$$\begin{cases} 1 & \text{αν} \quad i = j \\ 0 & \text{αν} \quad i \neq j \end{cases}$$

Δείξτε ότι $AI = IA = A$ για οποιονδήποτε $n \times n$ πίνακα A.

18. Βρείτε ένα 6×6 πίνακα που να ικανοποιεί κάθε μία από τις παρακάτω συνθήκες. Δώστε τη γενικότερη δυνατή απάντηση χρησιμοποιώντας γράμματα αντί για συγκεκριμένους αριθμούς για τα μη μηδενικά στοιχεία.

(α) $a_{ij} = 0$ αν $i \neq j$ (β) $a_{ij} = 0$ αν $i > j$ (γ) $a_{ij} = 0$ αν $i < j$ (δ) $a_{ij} = 0$ αν $\mid i - j \mid > 1$

19. (α) Αποδείξτε ότι τα στοιχεία στην j στήλη του AB είναι τα στοιχεία του γινομένου AB_j, όπου ο B_j είναι ο πίνακας που σχηματίζεται από την j στήλη του B.
(β) Αποδείξτε ότι τα στοιχεία στην i γραμμή του AB είναι τα στοιχεία του γινομένου A_iB, όπου ο A_i είναι ο πίνακας που σχηματίζεται από την i γραμμή του A.

1.5 Κανόνες της Αριθμητικής Πινάκων

Στην ενότητα αυτή θα μιλήσουμε για μερικές από τις ιδιότητες των πράξεων πινάκων. Θα δούμε ότι πολλοί από τους βασικούς κανόνες για τις πράξεις μεταξύ πραγματικών αριθμών ισχύουν και για τις πράξεις μεταξύ πινάκων, ενώ κάποιοι δεν ισχύουν.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΑΞΕΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Για δύο πραγματικούς αριθμούς a και b ισχύει πάντα $ab = ba$. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται *μεταθετικός νόμος για τον πολλαπλασιασμό*. Από την άλλη για δύο πίνακες A και B δεν ισχύει πάντα ότι οι AB και BA είναι ίσοι. Αυτό μπορεί να συμβαίνει για τρείς λόγους. Μπορεί για παράδειγμα ο AB να ορίζεται και ο BA να μην ορίζεται. Αυτό συμβαίνει αν ο A είναι ένας 2×3 πίνακας και ο B είναι ένας 3×4 πίνακας. Μπορεί επίσης να ορίζονται και ο AB και ο BA, αλλά να έχουν διαφορετικές διαστάσεις. Αυτό συμβαίνει αν ο A είναι ένας 2×3 πίνακας και ο B είναι ένας 3×2 πίνακας. Τέλος, όπως θα δούμε στο Παράδειγμα 1, μπορεί να έχουμε $AB \neq BA$ ακόμα και αν ορίζονται και ο AB και ο BA και έχουν τις ίδιες διαστάσεις.

Παράδειγμα 1 Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντάς τους παίρνουμε

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα $AB \neq BA$. $\triangle$

Παρότι ο μεταθετικός νόμος δεν ισχύει για τον πολλαπλασιασμό πινάκων, πολλοί νόμοι γνωστοί από την αριθμητική ισχύουν για τους πίνακες. Μερικοί από τους πιο σημαντικούς και τα ονόματά τους συνοψίζονται στο παρακάτω θεώρημα.

Θέωρημα 1.5.1. *Αν υποθέσουμε ότι οι διαστάσεις των πινάκων είναι τέτοιες ώστε οι αντίστοιχες πράξεις να ορίζονται, τότε ισχύουν οι παρακάτω κανόνες για την αριθμητική πινάκων.*

(α) $A + B = B + A$ ***(Μεταθετικός νόμος για την πρόσθεση)***
(β) $A + (B + C) = (A + B) + C$ ***(Προσεταιριστικός νόμος για την πρόσθεση)***
(γ) $A(BC) = (AB)C$ ***(Προσεταιριστικός νόμος για τον πολλαπλασιασμό)***
(δ) $A(B + C) = AB + AC$ ***(Επιμεριστικός νόμος)***
(ε) $(B + C)A = BA + CA$ ***(Επιμεριστικός νόμος)***
(στ) $A(B - C) = AB - AC$
(ζ) $(B - C)A = BA - CA$
(η) $a(B + C) = aB + aC$
(θ) $a(B - C) = aB - aC$
(ι) $(a + b)C = aC + bC$
(ια) $(a - b)C = aC - bC$
(ιβ) $a(bC) = (ab)C$
(ιγ) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Κάθε μία από τις εξισώσεις του θεωρήματος αυτού μας λέει ότι ισχύει μία ισότητα πινάκων. Για να αποδείξουμε μία από τις ισότητες αυτές, πρέπει να αποδείξουμε ότι ο πίνακας στην αριστερή πλευρά έχει τις ίδιες διαστάσεις με τον πίνακα στην δεξιά πλευρά και ότι τα αντίστοιχα στοιχεία στις δύο πλευρές είναι ίσα. Σαν παράδειγμα θα αποδείξουμε την (η). Κάποιες από τις υπόλοιπες αποδείξεις δίνονται σαν ασκήσεις.

Απόδειξη (η). Εφόσον στην αριστερή πλευρά εμφανίζεται η πράξη $B + C$, οι B και C πρέπει να έχουν τις ίδιες διαστάσεις, για παράδειγμα $m \times n$. Άρα και οι $a(B+C)$ και $aB + aC$ είναι επίσης $m \times n$ πίνακες και επομένως έχουν τις ίδιες διαστάσεις.

Έστω ότι l_{ij} είναι κάποιο στοιχείο στην αριστερή πλευρά και r_{ij} είναι το αντίστοιχο στοιχείο στη δεξια πλευρά. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη πρέπει να δείξουμε ότι $l_{ij} = r_{ij}$. Έστω ότι b_{ij} και c_{ij} είναι τα στοιχεία τα οποία βρίσκονται στην i γραμμή και την j στήλη του B και του C αντίστοιχα. Από τους ορισμούς των πράξεων πινάκων, έχουμε ότι

$$l_{ij} = a(b_{ij} + c_{ij}) \quad \text{και} \quad r_{ij} = ab_{ij} + ac_{ij}$$

Εφόσον $a(b_{ij} + c_{ij}) = ab_{ij} + ac_{ij}$, έχουμε ότι $l_{ij} = r_{ij}$. $\square$

Παρότι οι πράξεις της πρόσθεσης πινάκων και του πολλαπλασιασμού πινάκων ορίστηκαν για ζεύγη πινάκων, οι προσεταιριστικοί νόμοι *(β)* και *(γ)* μας επιτρέπουν να συμβολίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο τριών πινάκων με $A + B + C$ και με ABC χωρίς να εισάγουμε παρενθέσεις. Αυτό δικαιολογείται από το γεγονός ότι όπου και να βάλουμε τις παρενθέσεις οι προσεταιριστικοί νόμοι μας εγγυώνται ότι θα πάρουμε το ίδιο τελικό αποτέλεσμα. Χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι παρόμοια αποτελέσματα ισχύουν για τα αθροίσματα ή τα γινόμενα τεσσάρων ή περισσοτέρων πινάκων. Γενικά, *αν μας δώσουν οποιοδήποτε άθροισμα ή γινόμενο πινάκων ζεύγη παρενθέσεων μπορούν να εισαχθούν ή να διαγραφούν από οπουδήποτε μέσα στην έκφραση χωρίς να αλλάξει το τελικό αποτέλεσμα.*

Παράδειγμα 2 Σαν επεξηγηματικό παράδειγμα για τον προσεταιριστικό νόμο για τον πολλαπλασιασμό πινάκων ας θεωρήσουμε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Τότε

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Από την άλλη

$$BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Άρα $(AB)C = A(BC)$, όπως μας εγγυάται το Θεώρημα 1.5.1*γ*. $\triangle$

ΜΗΔΕΝΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Ένας πίνακας, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μηδέν, όπως οι

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ονομάζεται ***μηδενικός πίνακας***. Ένας μηδενικός πίνακας θα συμβολίζεται με $\mathit{0}$. Αν θέλουμε να δώσουμε έμφαση στις διαστάσεις θα γράφουμε $\mathit{0}_{m\times n}$ για τον $m \times n$ μηδενικό πίνακα.

Αν ο A είναι οποιοσδήποτε πίνακας και $\mathit{0}$ είναι ο μηδενικός πίνακας με τις ίδιες διαστάσεις, τότε είναι προφανές ότι $A + \mathit{0} = \mathit{0} + A = A$. Ο πίνακας $\mathit{0}$ παίζει τον ίδιο ρόλο στις ισότητες αυτές με τον ρόλο που παίζει ο αριθμός 0 στις ισότητες $a + 0 = 0 + a = a$.

Εφόσον γνωρίζουμε ήδη ότι κάποιοι από τους κανόνες της αριθμητικής για πραγματικούς αριθμούς δεν ισχύουν στην αριθμητική πινάκων, θα ήταν παρακινδυνευμένο να υποθέσουμε ότι όλες οι ιδιότητες του αριθμού 0 ισχύουν για τους μηδενικούς πίνακες. Για παράδειγμα, ας πάρουμε τα δύο παρακάτω αποτελέσματα γνωστά από την αριθμητική των πραγματικών αριθμών.

(i) Αν $ab = ac$ και $a \neq 0$, τότε $b = c$. (Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή σαν *νόμος της διαγραφής*.)

(ii) Αν $ad = 0$, τότε τουλάχιστον ένας από τους παράγοντες στο αριστερό μέλος είναι 0.

Όπως φαίνεται από το επόμενο παράδειγμα, τα αντίστοιχα αποτελέσματα δεν ισχύουν στην αριθμητική πινάκων.

Παράδειγμα 3 Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Έχουμε

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Παρότι $A \neq \mathit{0}$, θα ήταν *λάθος* να διαγράψουμε τον A και από τις δύο πλευρές της εξίσωσης $AB = AC$ και να γράψουμε $B = C$. Άρα ο νόμος της διαγραφής δεν ισχύει για πίνακες.

Επίσης έχουμε $AD = \mathit{0}$, ενώ $A \neq \mathit{0}$ και $D \neq \mathit{0}$. Άρα και το αποτέλεσμα (ii) δεν ισχύει για πίνακες. $\triangle$

Σε αντίθεση με τα παραπάνω παραδείγματα, υπάρχουν πολλές άλλες ιδιότητες του αριθμού μηδέν οι οποίες ισχύουν και για τους μηδενικούς πίνακες. Στο επόμενο θεώρημα συνοψίζουμε τις πιο σημαντικές από αυτές. Οι αποδείξεις αφήνονται σαν ασκήσεις.

Θεώρημα 1.5.2. *Αν υποθέσουμε ότι οι διαστάσεις των πινάκων είναι τέτοιες ώστε να ορίζονται οι αντίστοιχες πράξεις, τότε ισχύουν οι παρακάτω κανόνες για την αριθμητική πινάκων.*

$$\begin{array}{ll} (α) & A + 0 = 0 + A = A \\ (β) & A - A = 0 \\ (γ) & 0 - A = -A \\ (δ) & A0 = 0, \quad 0A = 0 \end{array}$$

Σαν εφαρμογή των αποτελεσμάτων στην αριθμητική πινάκων για τα οποία μιλήσαμε θα αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα το οποίο έχουμε ήδη αναφέρει σε προηγούμενη ενότητα.

Θεώρημα 1.5.3. *Κάθε σύστημα γραμμικών εξισώσεων είτε δεν έχει καμία λύση, είτε έχει ακριβώς μία λύση, είτε έχει άπειρες λύσεις.*

Απόδειξη. Αν το $AX = B$ είναι ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων, τότε ακριβώς ένα από τα παρακάτω θα είναι αλήθεια: (α) το σύστημα δεν έχει καμία λύση, (β) το σύστημα έχει ακριβώς μία λύση ή (γ) το σύστημα έχει περισσότερες από μία λύσεις. Η απόδειξη θα έχει ολοκληρωθεί αν καταφέρουμε να αποδείξουμε ότι στην περίπτωση (γ) το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Υποθέτουμε ότι το $AX = B$ έχει περισσότερες από μία λύσεις και έστω $X_0 = X_1 - X_2$, όπου οι X_1 και X_2 είναι οποιεσδήποτε δύο διαφορετικές λύσεις. Εφόσον οι X_1 και X_2 είναι διαφορετικές, ο πίνακας X_0 είναι μη μηδενικός. Επίσης

$$AX_0 = A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = B - B = 0$$

Αν το k είναι οποιοδήποτε βαθμωτό, τότε

$$\begin{aligned} A(X_1 + kX_0) &= AX_1 + A(kX_0) \\ &= AX_1 + k(AX_0) \\ &= B + k0 \\ &= B + 0 \\ &= B \end{aligned}$$

Άρα ο πίνακας $X_1 + kX_0$ είναι λύση του $AX = B$. Εφόσον ο X_0 είναι μη μηδενικός και υπάρχουν άπειρες επιλογές για το βαθμωτό k, η $AX = B$ έχει άπειρες λύσεις. $\square$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τετραγωνικοί πίνακες με 1 στην κύρια διαγώνιο και 0 εκτός της κυρίας διαγωνίου, όπως οι

ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{και τα λοιπά.}$$

Ένας πίνακας αυτής της μορφής ονομάζεται ***μοναδιαίος πίνακας*** και συμβολίζεται με I. Αν θέλουμε να δώσουμε έμφαση στις διαστάσεις θα γράφουμε I_n για τον $n \times n$ μοναδιαίο πίνακα.

Αν ο A είναι ένας $m \times n$ πίνακας, τότε όπως φαίνεται από το επόμενο παράδειγμα

$$AI_n = A \quad \text{και} \quad I_m A = A$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι ένας μοναδιαίος πίνακας παίζει στην αριθμητική πινάκων τον ίδιο ρόλο που παίζει ο αριθμός 1 στις σχέσεις $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Παράδειγμα 4 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Τότε

$$I_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

και

$$AI_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A \quad \triangle$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑ

Ορισμός. Αν ο A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας και μπορεί να βρεθεί ένας πίνακας B ώστε $AB = BA = I$, τότε θα λέμε ότι ο A είναι ***αντιστρέψιμος*** και θα λέμε ότι ο B είναι ένας ***αντίστροφος*** του A.

Παράδειγμα 5 Ο πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{είναι ένας αντίστροφος του} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

εφόσον

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

και

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Παράδειγμα 6 Ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

δεν είναι αντιστρέψιμος. Για να δούμε γιατί ας θεωρήσουμε έναν τυχαίο 3×3 πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Από το Παράδειγμα 9 της Ενότητας 1.4 η τρίτη στήλη του BA είναι

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$BA \neq I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \triangle$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΤΙ-ΣΤΡΟΦΩΝ

Είναι λογικό να ρωτήσουμε αν ένας αντιστρέψιμος πίνακας έχει περισσότερους από έναν αντίστροφους. Όπως θα φανεί από το επόμενο θεώρημα η απάντηση είναι όχι. Ένας αντιστρέψιμος πίνακας έχει ακριβώς έναν αντίστροφο.

Θεώρημα 1.5.4. *Αν οι B και C είναι και οι δύο αντίστροφοι του πίνακα A, τότε $B = C$.*

Απόδειξη. Εφόσον ο B είναι ένας αντίστροφος του A, θα ισχύει $BA = I$. Αν πολλαπλασιάσουμε και τις δύο πλευρές από δεξιά με C παίρνουμε $(BA)C = IC = C$. Όμως $(BA)C = B(AC) = BI = B$ και άρα $C = B$. □

Λόγω του σημαντικού αυτού αποτελέσματος μπορούμε να μιλάμε για «τον» αντίστροφο ενός αντιστρέψιμου πίνακα. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε θα συμβολίζουμε τον αντίστροφό του με A^{-1}. Άρα έχουμε

$$\boxed{AA^{-1} = I \quad \text{και} \quad A^{-1}A = I}$$

Ο αντίστροφος παίζει στην αριθμητική πινάκων τον ίδιο ρόλο που παίζει ο αντίστροφος a^{-1} στις αριθμητικές σχέσεις $aa^{-1} = 1$ και $a^{-1}a = 1$.

Παράδειγμα 7 Θεωρούμε τον 2×2 πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Αν $ad - bc \neq 0$, τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} \tag{1}$$

εφόσον $AA^{-1} = I_2$ και $A^{-1}A = I_2$ (επιβεβαιώστε το). Στην επόμενη ενότητα θα δούμε τον τρόπο με τον οποίο βρίσκουμε αντίστροφους αντιστρέψιμων πινάκων με διαστάσεις μεγαλύτερες από 2×2. $\triangle$

Θεώρημα 1.5.5. *Αν οι A και B είναι αντιστρέψιμοι πίνακες με τις ίδιες διαστάσεις, τότε*
(α) Ο AB είναι αντιστρέψιμος
(β) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Απόδειξη. Αν αποδείξουμε ότι $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$, τότε θα έχουμε αποδείξει ότι ο AB είναι αντιστρέψιμος και ότι $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Όμως $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$. Όμοια $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$. $\square$

Παρότι δεν θα το αποδείξουμε, το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να επεκταθεί ώστε να περιλάβει τρείς ή περισσότερους παράγοντες. Έτσι παίρνουμε τον ακόλουθο κανόνα.

Το γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων είναι πάντα αντιστρέψιμος πίνακας και ο αντίστροφός του είναι το γινόμενο των αντιστρόφων με την αντίστροφη σειρά.

Παράδειγμα 8 Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (1) παίρνουμε

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Επίσης

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Επομένως $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, όπως μας εγγυάται το Θεώρημα 1.5.5. $\triangle$

Στη συνέχεια θα ορίσουμε δυνάμεις ενός τετραγωνικού πίνακα και θα μιλήσουμε για τις ιδιότητές τους.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ

Ορισμός. Αν ο A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, τότε ορίζουμε τις δυνάμεις του A για μη αρνητικούς ακέραιους εκθέτες ως εξής

$$\boxed{A^0 = I} \qquad \boxed{A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n \text{ παράγοντες}} \quad (n > 0)}$$

Επιπλέον αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ορίζουμε τις δυνάμεις του για αρνητικούς ακέραιους εκθέτες ως εξής

$$\boxed{A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{n \text{ παράγοντες}}}$$

Παράδειγμα 9 Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

τότε από το Παράδειγμα 8

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{bmatrix}$$

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix}$$

△

Ο υπολογισμός δυνάμεων με μεγάλο εκθέτη για μεγάλους σε διαστάσεις πίνακες συνήθως περιέχει ένα πολύ μεγάλο πλήθος υπολογισμών. Τα πράγματα είναι πολύ πιο απλά για διαγώνιους πίνακες. Για παράδειγμα, η k δύναμη ενός διαγώνιου πίνακα

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

είναι

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

Επομένως για να υψώσουμε έναν διαγώνιο πίνακα στην k δύναμη αρκεί να υψώσουμε στην k δύναμη κάθε διαγώνιο στοιχείο του (επιβεβαιώστε το).

Το παρακάτω θεώρημα, το οποίο διατυπώνουμε χωρίς απόδειξη, δείχνει ότι οι γνωστοί νόμοι για εκθέτες ισχύουν και για τις δυνάμεις πινάκων.

Θεώρημα 1.5.6. *Αν ο A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας και οι r και s είναι ακέραιοι, τότε*

$$\boxed{A^r A^s = A^{r+s} \qquad (A^r)^s = A^{rs}}$$

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει κάποιες ακόμα ιδιότητες των δυνάμεων πινάκων.

Θεώρημα 1.5.7. *Αν ο A είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, τότε*
(α) Ο A^{-1} είναι αντιστρέψιμος και $(A^{-1})^{-1} = A$.
(β) Ο A^n είναι αντιστρέψιμος και $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$
(γ) Για οποιοδήποτε μη μηδενικό βαθμωτό k, ο kA είναι αντιστρέψιμος και $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}(A^{-1})$.

Απόδειξη (α) Εφόσον $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, ο A^{-1} είναι αντιστρέψιμος και $(A^{-1})^{-1} = A$.

(β) Αφήνεται σαν άσκηση.

(γ) Αν το k είναι ένα μη μηδενικό βαθμωτό, τότε τα *(ιβ)* και *(ιγ)* του Θεωρήματος 1.5.1 μας επιτρέπουν να γράψουμε

$$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \frac{1}{k}(kA)A^{-1} = \left(\frac{1}{k}k\right)AA^{-1} = (1)I = I$$

Όμοια $(\frac{1}{k}A^{-1})(kA) = I$. Άρα ο kA είναι αντιστρέψιμος και $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$. □

Τελειώνουμε αυτή την ενότητα με ένα θεώρημα για τις κύριες ιδιότητες του ανάστροφου. Θα μιλήσουμε για τις αποδείξεις στις ασκήσεις.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΑΝΑΣΤΡΟΦΟΥ

Θεώρημα 1.5.8. *Αν υποθέσουμε ότι οι διαστάσεις των πινάκων είναι τέτοιες ώστε οι αντίστοιχες πράξεις να ορίζονται, τότε*
(α) $(A^t)^t = A$
(β) $(A+B)^t = A^t + B^t$
(γ) $(kA)^t = kA^t$, *για οποιοδήποτε βαθμωτό* k
(δ) $(AB)^t = B^tA^t$

Παρότι δεν θα το αποδείξουμε, το μέρος *(δ)* του θεωρήματος αυτού μπορεί να επεκταθεί για να περιλάβει τρείς ή περισσότερους παράγοντες. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον επόμενο κανόνα.

Ο ανάστροφος ενός γινομένου πινάκων είναι ίσος με το γινόμενο των αναστρόφων τους με την αντίστροφη σειρά

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Προσέξτε την ομοιότητα που υπάρχει ανάμεσα στο αποτέλεσμα αυτό και το αποτέλεσμα που ακολουθεί το Θεώρημα 1.5.5 το οποίο αναφέρεται στον αντίστροφο ενός γινομένου πινάκων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 1.5

1. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad a = 4 \quad b = -7$$

Δείξτε ότι

(α) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (β) $(AB)C = A(BC)$ (γ) $(a + b)C = aC + bC$
(δ) $a(B - C) = aB - aC$

2. Χρησιμοποιώντας τους πίνακες και τα βαθμωτά της Άσκησης 1, δείξτε ότι

(α) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$ (β) $A(B - C) = AB - AC$ (γ) $(B + C)A = BA + CA$
(δ) $a(bC) = (ab)C$

3. Χρησιμοποιώντας τους πίνακες και τα βαθμωτά της Άσκησης 1, δείξτε ότι

(α) $(A^t)^t = A$ (β) $(A+B)^t = A^t + B^t$ (γ) $(aC)^t = aC^t$ (δ) $(AB)^t = B^t A^t$

4. Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Παραδείγματος 7 για να υπολογίσετε τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Επιβεβαιώστε ότι οι τρείς πίνακες A, B και C της Άσκησης 4 ικανοποιούν τις σχέσεις $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ και $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

6. Έστω ότι οι A και B είναι τετραγωνικοί πίνακες με τις ίδιες διαστάσεις. Ισχύει στην αριθμητική πινάκων η ταυτότητα $(AB)^2 = A^2B^2$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

7. Έστω ότι ο A είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας με αντίστροφο

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί ο πίνακας A.

8. Έστω ότι ο A είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας και έστω ότι ο αντίστροφος του $7A$ είναι ο

$$\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί ο πίνακας A.

9. Έστω ότι ο A είναι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστούν τα A^3, A^{-3} και $A^2 - 2A + I$.

10. Έστω ότι ο A είναι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Να προσδιοριστεί αν ο A είναι αντιστρέψιμος και αν ναι να βρεθεί ο αντίστροφός του. [***Υπόδειξη.*** Λύστε την $AX = I$ εξισώνοντας τα αντίστοιχα στοιχεία στις δύο πλευρές.]

11. Να βρεθεί ο αντίστροφος του

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

12. (α) Να βρεθούν 2×2 πίνακες A και B, τέτοιοι ώστε $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
(β) Δείξτε ότι αν οι A και B είναι τετραγωνικοί πίνακες τέτοιοι ώστε $AB = BA$, τότε

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

(γ) Να βρεθεί μία έκφραση για το $(A+B)^2$ η οποία να ισχύει για όλους τους τετραγωνικούς πίνακες A και B με τις ίδιες διαστάσεις.

13. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

όπου $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$. Δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και βρείτε τον αντίστροφό του.

14. Δείξτε ότι αν ο τετραγωνικός πίνακας A ικανοποιεί την $A^2 - 3A + I = \mathit{0}$, τότε $A^{-1} = 3I - A$.

15. (α) Δείξτε ότι ένας πίνακας ο οποίος έχει μία γραμμή με μηδενικά δεν μπορεί να έχει αντίστροφο.
(β) Δείξτε ότι ένας πίνακας ο οποίος έχει μία στήλη με μηδενικά δεν μπορεί να έχει αντίστροφο.

16. Είναι το άθροισμα δύο αντιστρέψιμων πινάκων αναγκαστικά αντιστρέψιμος πίνακας;

17. Έστω ότι οι A και B είναι τετραγωνικοί πίνακες με $AB = \mathit{0}$. Δείξτε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $B = \mathit{0}$.

18. Στο μέρος *(δ)* του Θεωρήματος 1.5.2 γιατί δεν γράψαμε $A\mathit{0} = \mathit{0} = \mathit{0}A$;

19. Στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση $a^2 = 1$ έχει ακριβώς δύο λύσεις. Να βρεθούν τουλάχιστον οχτώ διαφορετικοί 3×3 πίνακες οι οποίοι να ικανοποιούν την εξίσωση πινάκων $A^2 = I_3$. [***Υπόδειξη.*** Ψάξτε για λύσεις στις οποίες όλα τα στοιχεία εκτός της κύριας διαγωνίου να είναι μηδέν.]

20. Έστω $AX = B$ ένα συμβιβαστό σύστημα γραμμικών εξισώσεων και έστω X_1 μία λύση του. Δείξτε ότι κάθε λύση του συστήματος μπορεί να γραφτεί στη μορφή $X = X_1 + X_0$, όπου X_0 είναι μία λύση του $AX = \mathit{0}$. Δείξτε επίσης ότι κάθε πίνακας αυτής της μορφής είναι λύση.

21. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Δείξτε ότι

(α) $(A^t)^t$ (β) $(A+B)^t = A^t + B^t$ (γ) $(AB)^t = B^t A^t$ (δ) $(kA)^t = kA^t$

22. (α) Επιβεβαιώστε ότι αν αλλάξουμε τις θέσεις των στοιχείων που βρίσκονται σε κύκλο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ο πίνακας που θα πάρουμε είναι ο ανάστροφος του αρχικού πίνακα.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(β) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του (α) για να σας βοηθήσει να βρείτε έναν μη μηδενικό 3×3 πίνακα A τέτοιον ώστε $A^t = A$.

(γ) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του (α) για να σας βοηθήσει να βρείτε έναν μη μηδενικό 3×3 πίνακα A τέτοιον ώστε $A^t = -A$.

(δ) Γενικά αν ο A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, τότε για να πάρουμε τον A^t εναλλασουμε τα στοιχεία τα οποία είναι συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο. Χρησιμοποιήστε το στοιχείο αυτό για να σας βοηθήσει να βρείτε έναν μη μηδενικό 4×4 πίνακα A τέτοιον ώστε $A^t = A$.

23. Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται ***συμμετρικός*** αν $A = A^t$ και ***αντισυμμετρικός*** αν $A = -A^t$. Δείξτε ότι αν ο B είναι ένας τετραγωνικός πίνακας τότε

(α) Οι BB^t και $B + B^t$ είναι συμμετρικοί (β) Ο $B - B^t$ είναι συμμετρικος

24. Αν ο A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας και ο n είναι ένας θετικός ακέραιος αληθεύει ότι $(A^n)^t = (A^t)^n$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

25. Εφαρμόστε τα *(δ)* και *(ιγ)* του Θεωρήματος 1.5.1 στους πίνακες A, B και $(-1)C$ για να πάρετε το αποτέλεσμα στο *(στ)* του ίδιου θεωρήματος.

26. Χρησιμοποιήστε τα *(β)* και *(γ)* του Θεωρήματος 1.5.8 για να αποδείξετε ότι $(A - B)^t = A^t - B^t$.

27. Αποδείξτε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο A^t είναι αντιστρέψιμος και $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

28. Αποδείξτε το *(β)* του Θεωρήματος 1.5.1.

29. Αποδείξτε το Θεώρημα 1.5.2.

30. Αποδείξτε το *(γ)* του Θεωρήματος 1.5.1.

31. Αποδείξτε το *(β)* του Θεωρήματος 1.5.7.

32. Θεωρήστε τους νόμους που αφορούν τις δυνάμεις $A^r A^s = A^{r+s}$ και $(A^r)^s = A^{rs}$.
(α) Αποδείξτε ότι αν ο A είναι οποιοσδήποτε τετραγωνικός πίνακας, τότε οι νόμοι αυτοί ισχύουν για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς ακέραιους r και s.
(β) Αποδείξτε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε οι νόμοι αυτοί ισχύουν για οποιουσδήποτε αρνητικούς ακέραιους r και s.

33. Αποδείξτε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος και το k είναι οποιοδήποτε μη μηδενικό βαθμωτό, τότε $(kA)^n = k^n A^n$ για οποιαδήποτε ακέραια τιμή του n.

34. (α) Αποδείξτε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος και $AB = AC$, τότε $B = C$.
(β) Εξηγήστε γιατί το (α) και το Παράδειγμα 3 δεν αντιφάσκουν το ένα με το άλλο.

35. Αποδείξτε ότι αν ο R είναι ένας τετραγωνικός πίνακας σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και ο R δεν περιέχει μηδενικές γραμμές, τότε $R = I$.

1.6 Στοιχειώδεις Πίνακες και μία Μέθοδος για την Εύρεση του A^{-1}

Στην ενότητα αυτή θα μιλήσουμε για έναν αλγόριθμο για την εύρεση του αντίστροφου ενός αντιστρέψιμου πίνακα. Θα μιλήσουμε επίσης για κάποιες ιδιότητες των αντιστρέψιμων πινάκων.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΠΙΝΑΚΕΣ

Ορισμός. Ένας $n \times n$ πίνακας ονομάζεται ***στοιχειώδης πίνακας*** αν προκύπτει από τον $n \times n$ μοναδιαίο πίνακα I_n με την εφαρμογή μίας στοιχειώδους διαδικασίας γραμμών.

Παράδειγμα 1 Παρακάτω βλέπουμε τέσσερεις στοιχειώδεις πίνακες και τις διαδικασίες που τους παράγουν.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη γραμμή του I_2 με -3.	Εναλλάσουμε τη δεύτερη και την τέταρτη γραμμή του I_4.	Προσθέτουμε 3 φορές την τρίτη γραμμή του I_3 στην πρώτη γραμμή.	Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή του I_3 με 1.

$\triangle$

Όταν ένας πίνακας A πολλαπλασιάζεται από τα *αριστερά* με έναν στοιχειώδη πίνακα E, το αποτέλεσμα είναι η εφαρμογή μίας στοιχειώδους διαδικασίας γραμμών στον A. Αυτό είναι το περιεχόμενο του επόμενου θεωρήματος, το οποίο θα διατυπώσουμε χωρίς να αποδείξουμε.

Θεώρημα 1.6.1. *Αν ο στοιχειώδης πίνακας E προκύπτει από την εφαρμογή μίας στοιχειώδους διαδικασίας στον I_m και ο A είναι ένας $m \times n$, τότε το γινόμενο EA είναι ο πίνακας που προκύπτει αν η ίδια στοιχειώδης διαδικασία εφαρμοστεί στον A.*

Παράδειγμα 2 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

και τον στοιχειώδη πίνακα

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ο οποίος προκύπτει προσθέτοντας τρείς φορές την πρώτη γραμμή του I_3 στην τρίτη γραμμή του. Το γινόμενο EA είναι

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός είναι ακριβώς ο πίνακας που προκύπτει αν προσθέσουμε τρείς φορές την πρώτη γραμμή του A στην τρίτη γραμμή του. $\triangle$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Το Θεώρημα 1.6.1 έχει κυρίως θεωρητικό ενδιαφέρον και θα το χρησιμοποιήσουμε παρακάτω για να πάρουμε κάποια αποτελέσματα για πίνακες και συστήματα γραμμικών εξισώσεων. Από την άποψη των υπολογισμών είναι προτιμότερο να εφαρμόζουμε τις στοιχειώδεις διαδικασίες γραμμών άμεσα από το να πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά με ένα στοιχειώδη πίνακα.

Αν μία στοιχειώδης διαδικασία γραμμών εφαρμόζεται σέ ένα μοναδιαίο πίνακα I για να παραχθεί ένας στοιχειώδης πίνακας E, τότε υπάρχει μία δεύτερη στοιχειώδης διαδικασία η οποία όταν εφαρμοστεί στον E οδηγεί πίσω στον I. Για παράδειγμα, αν παίρνουμε τον E πολλαπλασιάζοντας την i γραμμή του I με τη μη μηδενική σταθερά c, τότε μπορούμε να ξαναπάρουμε τον I αν πολλαπλασιάσουμε την i γραμμη του E με $1/c$. Στον Πίνακα 1 βλέπουμε όλες τις διαφορετικές περιπτώσεις.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Διαδικασία Γραμμών στον I η οποία Παράγει τον E	**Διαδικασία Γραμμών στον E η οποία Ξαναπαράγει τον I**
Πολλαπλασιασμός της i γραμμής με $c \neq 0$	Πολλαπλασιασμός της i γραμμής με $1/c$
Εναλλαγή της i και της j γραμμής	Εναλλαγή της i και της j γραμμής
Πρόσθεση c επί την i γραμμή στην j γραμμή	Πρόσθεση $-c$ επί την i γραμμή στην j γραμμή

Οι διαδικασίες στο δεξιό μέρος ονομάζονται ***αντίστροφες διαδικασίες*** των αντίστοιχων διαδικασιών στο αριστερό μέρος.

Παράδειγμα 3 Σε κάθε ένα από τα παρακάτω παραδείγματα, μία στοιχειώδης διαδικασία εφαρμόζεται στον 2×2 μοναδιαίο πίνακα για να πάρουμε ένα στοιχειώδη πίνακα E. Μετά εφαρμόζεται η αντίστροφη στοιχειώδης διαδικασία στον E για να πάμε πίσω στον μοναδιαίο πίνακα.

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&0\\0&7\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη γραμμή με 7.	Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη γραμμή με $\frac{1}{7}$.

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

Εναλλάσουμε την πρώτη και τη δεύτερη γραμμή.	Εναλλάσουμε την πρώτη και τη δεύτερη γραμμή.

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&5\\0&1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε 5 φορές τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη.	Προσθέτουμε -5 φορές τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη.

$\triangle$

Στο επόμενο θεώρημα θα δούμε μία σημαντική ιδιότητα των στοιχειωδών πινάκων.

Θεώρημα 1.6.2. *Κάθε στοιχειώδης πίνακας είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι στοιχειώδης πίνακας.*

Απόδειξη. Αν ο E είναι ένας στοιχειώδης πίνακας, τότε ο E προκύπτει από την εφαρμογή κάποιας στοιχειώδους διαδικασίας στον I. Έστω E_0 ο πίνακας που προκύπτει από την εφαρμογή στον I της αντίστροφης αυτής της διαδικασίας. Αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα 1.6.1 και χρησιμοποιήσουμε το ότι αντίστροφες διαδικασίες γραμμών αλληλοακυρώνονται παίρνουμε ότι

$$E_0 E = I \quad \text{και} \quad EE_0 = I$$

Επομένως ο στοιχειώδης πίνακας E_0 είναι ο αντίστροφος του E. □

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΓΡΑΜΜΩΝ

Αν μπορούμε να πάρουμε τον πίνακα B από τον πίνακα A εφαρμόζοντας μία πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών διαδικασιών γραμμών, τότε προφανώς μπορούμε να πάμε από τον B πίσω στον A εφαρμόζοντας τις αντίστροφες των διαδικασιών αυτών με την αντίστροφη σειρά. Δύο πίνακες θα λέγονται ***γραμμοϊσοδύναμοι*** αν μπορούμε να πάρουμε τον ένα από τον άλλο με μία πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών διαδικασιών γραμμών.

Στο επόμενο θεώρημα θα διατυπώσουμε κάποιες θεμελιώδεις σχέσεις ανάμεσα στους $n \times n$ πίνακες και τα συστήματα n εξισώσεων με n αγνώστους. Τα αποτελέσματα αυτά είναι ιδιαίτερα σημαντικά και θα τα χρησιμοποιήσουμε πολλές φορές στις ενότητες που ακολουθούν.

Θεώρημα 1.6.3. *Αν ο A είναι ένας $n \times n$ πίνακας, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα, δηλαδή είτε είναι όλα αλήθεια είτε όλα δεν είναι αλήθεια.*
(α) Ο A είναι αντιστρέψιμος.
(β) Η $AX = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση.
(γ) Ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον I_n.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την ισοδυναμία αποδεικνύοντας ότι *(α)* ⇒ *(β)* ⇒ *(γ)* ⇒ *(α)*.

(α) ⇒ *(β)*: Υποθέτουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Έστω ότι η X_0 είναι μία λύση της $AX = 0$. Τότε θα ισχύει $AX_0 = 0$. Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης αυτής με A^{-1} παίρνουμε $A^{-1}(AX_0) = A^{-1}0$, ή $(A^{-1}A)X_0 = 0$, ή $IX_0 = 0$, ή $X_0 = 0$. Άρα η $AX = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση.

(β) ⇒ *(γ)*: Έστω ότι η $AX = 0$ είναι η εξίσωση πινάκων που αντιστοιχεί στο σύστημα

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{array} \tag{1}$$

Υποθέτουμε ότι το σύστημα έχει μόνο την τετριμμένη λύση. Αν λύσουμε με απαλοιφή Gauss-Jordan, τότε το σύστημα εξισώσεων το οποίο αντιστοιχεί στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα θα είναι

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & & & = & 0 \\ & x_2 & & & = & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & x_n & = & 0 \end{array} \tag{2}$$

Επομένως ο επαυξημένος πίνακας

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{bmatrix}$$

του (1) ανάγεται στον επαυξημένο πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

του (2) με μία ακολουθία στοιχειωδών διαδικασιών γραμμών. Αν αγνοήσουμε την τελευταία στήλη (η οποία αποτελείται αποκλειστικά από μηδενικά) στον καθένα από αυτούς τους πίνακες, βλέπουμε ότι ο A μπορεί να αναχθεί στον I_n με μία ακολουθία στοιχειωδών διαδικασιών γραμμών, δηλαδή ότι ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον I_n.

(γ) $\Rightarrow$ *(α)*: Υποθέτουμε ότι ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον I_n, δηλαδή ότι ο A μπορεί να αναχθεί στον I_n με μία πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών διαδικασιών γραμμών. Από το Θεώρημα 1.6.1 κάθε μία από τις διαδικασίες αυτές μπορεί να επιτευχθεί πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με τον κατάλληλο στοιχειώδη πίνακα. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να βρούμε στοιχειώδεις πίνακες E_1, $E_2, \ldots, E_k$ τέτοιους ώστε

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I_n \tag{3}$$

Από το Θεώρημα 1.6.2, οι E_1, $E_2, \ldots, E_k$ είναι αντιστρέψιμοι. Αν πολλαπλασιάσουμε από αριστερά και τα δύο μέλη της εξίσωσης (3) διαδοχικά με τους $E_k^{-1}, \ldots, E_2^{-1}$, E_1^{-1} παίρνουμε

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I_n = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} \tag{4}$$

Εφόσον στην (4) εκφράζεται ο A σαν γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων, συμπεραίνουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Το (γ) του Θεωρήματος 1.6.3 είναι ισοδύναμο με το να είναι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A ίση με I_n. Αυτό συμβαίνει επειδή η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A είναι μοναδική και ο I_n είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και άρα ο I_n πρέπει να είναι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A.

ΜΙΑ ΜΕΘΟΔΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Σα μία πρώτη εφαρμογή του Θεωρήματος 1.6.3 θα μιλήσουμε για μία μέθοδο εύρεσης του αντίστροφου ενός αντιστρέψιμου πίνακα. Αν αντιστρέψουμε και τα δύο μέλη της (4) παίρνουμε $A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1$ ή ισοδύναμα

$$A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1 I_n \tag{5}$$

Η προηγούμενη εξίσωση μας λέει ότι μπορούμε να πάρουμε τον A^{-1} πολλαπλασιάζοντας διαδοχικά από τα αριστερά τον I_n με τους στοιχειώδεις πίνακες E_1, $E_2, \ldots$, E_k. Εφόσον ο κάθε πολλαπλασιασμός από τα αριστερά με έναν από αυτούς τους πίνακες οδηγεί στην εφαρμογή μίας στοιχειώδους διαδικασίας γραμμών, παίρνουμε, από τη σύγκριση των Εξισώσεων (3) και (5), ότι *η ακολουθία των διαδικασιών γραμμών η οποία ανάγει τον A στον I_n ανάγει τον I_n στον A^{-1}*. Άρα παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

Για να βρούμε τον αντίστροφο ενός πίνακα A πρέπει να βρούμε μία ακολουθία στοιχειωδών διαδικασιών γραμμών με την οποία ανάγεται ο A στον μοναδιαίο και μετά να εφαρμόσουμε την ίδια ακολουθία διαδικασιών στον I_n για να πάρουμε τον A^{-1}.

Μία απλή μέθοδος για να εφαρμόσουμε την διαδικασία αυτή είναι αυτή που θα δούμε στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4 Να βρεθεί ο αντίστροφος του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Λύση. Θέλουμε να ανάγουμε τον A στο μοναδιαίο πίνακα με διαδικασίες γραμμών και ταυτόχρονα να εφαρμόσουμε τις διαδικασίες αυτές στον I για να πάρουμε τον A^{-1}. Για να το πετύχουμε αυτό θα φτιάξουμε έναν πίνακα με τον πίνακα A στο αριστερό μέρος και τον μοναδιαίο πίνακα στο δέξιό μέρος. Έτσι θα πάρουμε έναν πίνακα της μορφής

$$[A \mid I]$$

Μετά θα εφαρμόσουμε διαδικασίες γραμμών στον πίνακα αυτό μέχρι η αριστερή πλευρά να γίνει I. Οι διαδικασίες αυτές μετατρέπουν τη δεξιά πλευρά σε A^{-1}. Έτσι ο τελικός πίνακας θα είναι της μορφής

$$\left[I \mid A^{-1}\right]$$

Οι υπολογισμοί που κάνουμε είναι οι ακόλουθοι

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Προσθέσαμε -2 φορές την πρώτη γραμμή στη δεύτερη και -1 φορά την πρώτη γραμμή στην τρίτη.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Προσθέσαμε 2 φορές τη δεύτερη γραμμή στην τρίτη.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Πολλαπλασιάσαμε την τρίτη γραμμή με -1.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Προσθέσαμε 3 φορές την τρίτη γραμμή στη δεύτερη και -3 φορές την τρίτη γραμμή στην πρώτη.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Προσθέσαμε -2 φορές τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη.

Άρα

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \triangle$$

Συχνά δεν ξέρουμε από πριν αν ένας συγκεκριμένος πίνακας είναι αντιστρέψιμος. Αν ένας $n \times n$ πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε δεν μπορεί να αναχθεί στον I_n με στοιχειώδεις διαδικασίες γραμμών [μέρος (γ) του Θεωρήματος 1.6.3]. Αυτό σημαίνει ότι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του έχει τουλάχιστον μία γραμμή από μηδενικά. Έτσι αν επιχειρήσουμε να εφαρμόσουμε την διαδικασία που περιγράψαμε στο προηγούμενο παράδειγμα σε έναν πίνακα ο οποίος δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε σε κάποιο σημείο των υπολογισμών θα εμφανιστεί μία μηδενική γραμμή στην *αριστερή πλευρά*. Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο συγκεκριμένος πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος και να σταματήσουμε τους υπολογισμούς στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα 5 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Αν εφαρμόσουμε τη διαδικασία του Παραδείγματος 4 θα πάρουμε

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Προσθέσαμε -2 φορές την πρώτη γραμμή στη δεύτερη και προσθέσαμε την πρώτη γραμμή στην τρίτη.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Προσθέσαμε τη δεύτερη γραμμή στην τρίτη.

Εφόσον πήραμε μία γραμμή με μηδενικά στην αριστερή πλευρά, ο A δεν είναι αντιστρέψιμος. $\triangle$

Παράδειγμα 6 Στο Παράδειγμα 4 αποδείξαμε ότι ο

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Άρα, από το Θεώρημα 1.6.3, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & + & 8x_3 & = & 0 \end{array}$$

έχει μόνο την τετριμμένη λύση. $\triangle$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 1.6

1. Ποιοι από τους παρακάτω είναι στοιχειώδεις πίνακες;

(α) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (γ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ (δ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(ε) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (στ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ζ) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Να βρεθεί μία διαδικασία γραμμών η οποία θα οδηγήσει από τον κάθε ένα από τους παρακάτω στοιχειώδεις πίνακες πίσω στον μοναδιαίο πίνακα.

(α) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (γ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (δ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

Να βρεθούν στοιχειώδεις πίνακες E_1, E_2, E_3 και E_4 τέτοιοι ώστε

(α) $E_1A = B$ (β) $E_2B = A$ (γ) $E_3A = C$ (δ) $E_4C = A$

4. Στην Άσκηση 3 θα μπορούσαμε να βρούμε ένα στοιχειώδη πίνακα E τέτοιον ώστε $EB = C$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Στις Ασκήσεις 5-7 χρησιμοποιήστε τις μεθόδους των Παραδειγμάτων 4 και 5 για να βρείτε τον αντίστροφο κάθε ενός από τους πίνακες εφόσον είναι αντιστρέψιμοι.

5. (α) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ (γ) $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

6. (α) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$ (γ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (δ) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

(ε) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

7. (α) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (γ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

(δ) $\begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ (ε) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

8. Να βρεθεί ο αντίστροφος κάθε ενός από τους παρακάτω 4×4 πίνακες, αν τα k_1, k_2, k_3, k_4 και k είναι όλα μη μηδενικά.

(α) $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (γ) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$

9. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

(α) Να βρεθούν στοιχειώδεις πίνακες E_1 και E_2 τέτοιοι ώστε $E_2E_1A = I$.
(β) Να γραφτεί ο A^{-1} σα γινόμενο δύο στοιχειωδών πινάκων.
(γ) Να γραφτεί ο A σα γινόμενο δύο στοιχειωδών πινάκων.

10. Να εφαρμοστούν οι παρακάτω στοιχειώδεις διαδικασίες στον

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά με έναν κατάλληλο στοιχειώδη πίνακα τον A. Ελέγξτε τις απαντήσεις σας υπολογίζοντας τον πίνακα που προκύπτει από την εφαρμογή των στοιχειωδών διαδικασιών στον A.
(α) Εναλλαγή της πρώτης και της τρίτης γραμμής.
(β) Πολλαπλασιασμός της δεύτερης γραμμής με 1/3.
(γ) Πρόσθεση δύο φορές της δεύτερης γραμμής στην πρώτη γραμμή.

11. Να εκφραστεί ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

στη μορφή $A = EFGR$, όπου οι E, F και G είναι στοιχειώδεις πίνακες και ο R είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

12. Αποδείξτε ότι αν ο

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

είναι ένας στοιχειώδης πίνακας, τότε τουλάχιστον ένα από τα στοιχεία της τρίτης γραμμής πρέπει να είναι μηδέν.

13. Αποδείξτε ότι ο

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

δεν είναι αντιστρέψιμος για οποιεσδήποτε τιμές των στοιχείων του.

14. Αποδείξτε ότι αν ο A είναι ένας $m \times n$ πίνακας, τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας C τέτοιος ώστε ο CA να είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

15. Αποδείξτε ότι αν ο A είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας και ο είναι B γραμμοϊσοδύναμος με τον A, τότε ο B είναι επίσης αντιστρέψιμος.

1.7 Μερικά Ακόμα Αποτελέσματα στα Συστήματα Εξισώσεων και την Αντιστρεψιμότητα

Σε αυτή την ενότητα θα πάρουμε κάποια καινούρια αποτελέσματα τα οποία αφορούν τα συστήματα γραμμικών εξισώσεων και την αντιστρεψιμότητα πινάκων. Τα αποτελέσματα αυτά θα μας οδηγήσουν σε μία νέα μέθοδο για την επίλυση n εξισώσεων με n αγνώστους.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ξεκινάμε με ένα θεώρημα το οποίο μας δίνει μία νέα μέθοδο για την επίλυση μίας κατηγορίας συστημάτων γραμμικών εξισώσεων.

Θεώρημα 1.7.1. *Αν ο A είναι ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας, τότε για κάθε $n \times 1$ πίνακα B, το σύστημα εξισώσεων $AX = B$ έχει ακριβώς μία λύση, την $X = A^{-1}B$.*

Απόδειξη. Εφόσον $A(A^{-1}B) = B$, παίρνουμε ότι η $X = A^{-1}B$ είναι μία λύση του $AX = B$. Για να δείξουμε ότι αυτή είναι η μόνη λύση, θα υποθέσουμε ότι η X_0 είναι μία τυχαία λύση και θα δείξουμε ότι η X_0 πρέπει να είναι ίση με $A^{-1}B$.

Αν η X_0 είναι μία λύση, τότε $AX_0 = B$. Πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές με A^{-1} παίρνουμε $X_0 = A^{-1}B$. □

Παράδειγμα 1 Θεωρούμε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ x_1 & & & + & 8x_3 & = & 17 \end{array}$$

Σε πινακωτή μορφή το σύστημα αυτό γράφεται $AX = B$ με

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Στο Παράδειγμα 4 της προηγούμενης ενότητας δείξαμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Από το Θεώρημα 1.7.1 η λύση του συστήματος είναι

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ή $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$. $\triangle$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Η μέθοδος του Παραδείγματος 1 μπορεί να εφαρμοστεί μόνο όταν το σύστημα έχει το ίδιο πλήθος εξισώσεων και αγνώστων και ο πίνακας συντελεστών είναι αντιστρέψιμος.

Συχνά κανείς ενδιαφέρεται να λύσει μία ακολουθία συστημάτων

$$AX = B_1, \quad AX = B_2, \quad AX = B_3, \quad \ldots, \quad AX = B_k$$

κάθε ένα από τα οποία έχει τον ίδιο τετραγωνικό πίνακα συντελεστών A. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε μπορούμε να πάρουμε τις λύσεις

$$X_1 = A^{-1}B_1, \quad X_2 = A^{-1}B_2, \quad X_3 = A^{-1}B_3, \quad \ldots, \quad X_k = A^{-1}B_k$$

αντιστρέφοντας έναν πίνακα και κάνοντας k πολλαπλασιασμούς πινάκων. Μία πιο αποτελεσματική μέθοδος είναι να σχηματίσουμε τον πίνακα

$$[A \mid B_1 \mid B_2 \mid \cdots \mid B_k] \tag{1}$$

στον οποίο ο πίνακας συντελεστών A έχει «επαυξηθεί» με τους πίνακες $B_1, B_2, \ldots, B_k$. Ανάγοντας τον (1) σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή μπορούμε να λύσουμε και τα k συστήματα μαζί με απαλοιφή Gauss-Jordan. Η μέθοδος αυτή έχει το πρόσθετο πλεονέκτημα ότι μπορεί να εφαρμοστεί και όταν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Παράδειγμα 2 Να λυθούν τα συστήματα

(α)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ x_1 & & & + & 8x_3 & = & 9 \end{array}$$

(β)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ x_1 & & & + & 8x_3 & = & -6 \end{array}$$

Λύση. Τα δύο συστήματα έχουν τον ίδιο πίνακα συντελεστών. Αν επαυξήσουμε αυτό τον πίνακα συντελεστών με τις στήλες με τις σταθερές στη δεξιά πλευρά αυτών των συστημάτων παίρνουμε τον

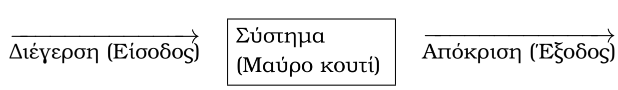
$$\left[\begin{array}{rrrcrcr} 1 & 2 & 3 & | & 4 & | & 1 \\ 2 & 5 & 3 & | & 5 & | & 6 \\ 1 & 0 & 8 & | & 9 & | & -6 \end{array}\right]$$

Ανάγοντας τον πίνακα αυτό σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή παίρνουμε τον (επιβεβαιώστε το)

$$\left[\begin{array}{rrrcrcr} 1 & 0 & 0 & | & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & | & -1 \end{array}\right]$$

Από τις δύο τελευταίες στήλες του παραπάνω πίνακα παίρνουμε ότι η λύση του συστήματος (α) είναι $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ και η λύση του συστήματος (β) είναι $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. △

Ανοίγουμε εδώ μία μικρή παρένθεση για να μιλήσουμε για μία κατηγορία εφαρμογών στην οποία οδηγούμαστε σε ένα σύνολο από γραμμικά συστήματα με τον ίδιο πίνακα συντελεστών. Σε πολλά διαφορετικά εφαρμοσμένα προβλήματα εμφανίζονται φυσικά συστήματα τα οποία περιγράφουμε ως *μαύρα κουτιά*. Ο όρος αυτός χρησιμοποιείται για να δείξουμε ότι οι εσωτερικές διαδικασίες του συστήματος είναι άγνωστες ή δεν έχουν σημασία για το πρόβλημα. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι όταν κάποια διέγερση (όπως ηλεκτρικό ρεύμα, δύναμη, θερμότητα) εφαρμοστεί στην είσοδο του μαύρου κουτιού αυτό οδηγεί σε μία απόκριση στην έξοδο (Σχήμα 1).



Σχήμα 1

Συχνά οι διεγέρσεις και οι αποκρίσεις μπορούν να περιγραφούν μαθηματικά από πίνακες με μία στήλη. Για παράδειγμα, αν το μαύρο κουτί είναι ένας μικροεπεξεργαστής, τότε η διέγερση μπορεί να είναι ένας $n \times 1$ πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι n τάσεις τις οποίες μετράμε σε κάποια σημεία εισόδου και η απόκριση μπορεί να είναι ένας $m \times 1$ πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι m ηλεκτρικά ρεύματα τα οποία μετράμε σε κάποια καλώδια εξόδου. Από μαθηματική σκοπιά ένα τέτοιο σύστημα δεν κάνει τίποτα παραπάνω από το να μετασχηματίζει έναν $n \times 1$ πίνακα διεγέρσεων σε έναν $m \times 1$ πίνακα αποκρίσεων.

Για πολλά συστήματα μαύρων κουτιών ο πίνακας διεγέρσεων $M_{\Delta IE\Gamma}$ και ο πίνακας αποκρίσεων $M_{A\Pi OK}$ σχετίζονται μέσω μίας εξίσωσης πινάκων

$$AM_{\Delta IE\Gamma} = M_{A\Pi OK}$$

όπου τα στοιχεία του A είναι φυσικές παράμετροι που καθορίζονται από το σύστημα. Τέτοια συστήματα ονομάζονται ***γραμμικά φυσικά συστήματα***.

Σε πολλές εφαρμογές είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ποια διέγερση πρέπει να προκαλέσουμε στο σύστημα για να πετύχουμε μία συγκεκριμένη απόκριση που επιθυμούμε. Για να το βρούμε αρκεί να λύσουμε ως προς την άγνωστη διέγερση X την εξίσωση $AX = M_{A\Pi OK}$, όπου $M_{A\Pi OK}$ είναι η απόκριση που θέλουμε να πάρουμε. Επομένως αν έχουμε μία ακολουθία από διαφορετικούς πίνακες αποκρίσεων $B_1, B_2, \ldots, B_k$ και θέλουμε να προσδιορίσουμε τους πίνακες διεγέρσεων που παράγουν αυτές τις αποκρίσεις, τότε πρέπει να λύσουμε τα k συστήματα γραμμικών εξισώσεων

$$AX = B_1, \quad AX = B_2, \quad \ldots, \quad AX = B_k$$

κάθε ένα από τα οποία έχει τον ίδιο πίνακα συντελεστών A.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Μέχρι τώρα για να δείξουμε ότι ένας $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος ήταν αναγκαίο να βρούμε έναν $n \times n$ πίνακα B τέτοιον ώστε

$$AB = I \quad \text{και} \quad BA = I$$

Το επόμενο θεώρημα μας λέει ότι αν βρούμε έναν $n \times n$ πίνακα B ο οποίος να ικανοποιεί *οποιαδήποτε* από τις δύο συνθήκες, τότε η άλλη θα ισχύει αυτόματα.

Θεώρημα 1.7.2. *Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας.*
(α) Αν ο B είναι ένας τετραγωνικός πίνακας ο οποίος ικανοποιεί την $BA = I$, τότε $B = A^{-1}$.
(β) Αν ο B είναι ένας τετραγωνικός πίνακας ο οποίος ικανοποιεί την $AB = I$, τότε $B = A^{-1}$.

Θα αποδείξουμε το *(α)* και θα αφήσουμε το *(β)* σαν άσκηση.

Απόδειξη (α). Υποθέτουμε ότι $BA = I$. Αν καταφέρουμε να αποδείξουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε η απόδειξη μπορεί να ολοκληρωθεί πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της $BA = I$ με A^{-1} για να πάρουμε

$$BAA^{-1} = IA^{-1} \quad \text{ή} \quad BI = IA^{-1} \quad \text{ή} \quad B = A^{-1}$$

Για να δείξουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος αρκεί να δείξουμε ότι το σύστημα $AX = \mathit{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση (βλέπε Θεώρημα 1.6.3). Έστω X_0 μία λύση αυτού του συστήματος. Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της $AX_0 = \mathit{0}$ από αριστερά με B παίρνουμε $BAX_0 = B\mathit{0}$ ή $IX_0 = \mathit{0}$ ή $X_0 = \mathit{0}$. Επομένως το σύστημα εξισώσεων $AX = \mathit{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση. □

Μετά από όσα είπαμε μπορούμε τώρα να προσθέσουμε μία τέταρτη συνθήκη ισοδύναμη με τις τρείς που δώσαμε στο Θεώρημα 1.6.3.

Θεώρημα 1.7.3. *Αν ο A είναι ένας $n \times n$ πίνακας, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*
(α) Ο A είναι αντιστρέψιμος.
(β) Η $AX = \mathit{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση.
(γ) Ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον I_n.
(δ) Η $AX = B$ είναι συμβιβαστή για κάθε $n \times 1$ πίνακα B.

Απόδειξη. Εφόσον αποδείξαμε στο Θεώρημα 1.6.3 ότι τα *(α)*, *(β)* και *(γ)* είναι ισοδύναμα, αρκει να αποδείξουμε ότι *(α)* $\Rightarrow$ *(δ)* και ότι *(δ)* $\Rightarrow$ *(α)*.

(α) $\Rightarrow$ *(δ)*: Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και ο B είναι ένας $n \times 1$ πίνακας, τότε η $X = A^{-1}B$ είναι μία λύση της $AX = B$ από το Θεώρημα 1.7.1. Επομένως η $AX = B$ είναι συμβιβαστή.

(δ) $\Rightarrow$ *(α)*: Αν το σύστημα $AX = B$ είναι συμβιβαστό για κάθε $n \times 1$ πίνακα B, τότε σίγουρα τα συστήματα

$$AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

είναι συμβιβαστά. Έστω ότι οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι λύσεις των αντίστοιχων συστημάτων. Σχηματίζουμε έναν $n \times n$ πίνακα C με στήλες αυτές τις λύσεις. Ο C δηλαδή έχει τη μορφή

$$C = [X_1 \mid X_2 \mid \cdots \mid X_n]$$

Όπως είπαμε στο Παράδειγμα 9 της Ενότητας 1.4, οι διαδοχικές στήλες του γινομένου AC θα είναι

$$AX_1, AX_2, \ldots, AX_n$$

Επομένως

$$AC = [AX_1 \mid AX_2 \mid \cdots \mid AX_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I$$

Από το μέρος *(β)* του Θεωρήματος 1.7.2 παίρνουμε ότι $C = A^{-1}$. Επομένως ο A είναι αντιστρέψιμος. $\square$

Στη συνέχεια του βιβλίου θα συναντήσουμε πολλές φορές το παρακάτω θεμελιώδες πρόβλημα το οποίο εμφανίζεται σε πολλές διαφορετικές περιοχές.

Ένα Θεμελιώδες Πρόβλημα. Θεωρούμε έναν $m \times n$ πίνακα A. Να βρεθούν όλοι οι $m \times 1$ πίνακες B για τους οποίους το σύστημα εξισώσεων $AX = B$ είναι συμβιβαστό.

Αν ο A είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, τότε το Θεώρημα 1.7.1 δίνει την απάντηση σε αυτό το πρόβλημα, εφόσον μας λέει ότι για *κάθε* $m \times 1$ πίνακα B το $AX = B$ έχει τη μοναδική λύση $X = A^{-1}B$. Αν ο A δεν είναι τετραγωνικός ή ο A είναι τετραγωνικός αλλά δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε δε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 1.7.1. Στις περιπτώσεις αυτές ο πίνακας B πρέπει να ικανοποιεί συγκεκριμένες συνθήκες για να είναι το $AX = B$ συμβιβαστό. Το επόμενο παράδειγμα μας δείχνει με ποιον τρόπο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την απαλοιφή Gauss για να προσδιορίσουμε τέτοιες συνθήκες.

Παράδειγμα 3 Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν τα b_1, b_2 και b_3 ώστε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & b_1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & b_2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & b_3 \end{array}$$

να είναι συμβιβαστό;

Λύση. Ο επαυξημένος πίνακας είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 3 & b_3 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός μπορεί να αναχθεί σε κλιμακωτή μορφή όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

Προσθέσαμε -1 φορά την πρώτη γραμμή στη δεύτερη και προσθέσαμε -2 φορές την πρώτη γραμμή στην τρίτη.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάσαμε τη δεύτερη γραμμή με -1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix}$$

Προσθέσαμε τη δεύτερη γραμμή στην τρίτη.

Eιναι τώρα φανερό από την τρίτη γραμμή του πίνακα ότι το σύστημα έχει λύση αν και μόνο αν τα b_1, b_2 και b_3 ικανοποιούν τη συνθήκη

$$b_3 - b_2 - b_1 = 0 \quad \text{ή} \quad b_3 = b_1 + b_2$$

Μπορούμε να εκφράσουμε αυτή τη συνθήκη και με τον παρακάτω τρόπο: Το σύστημα $AX = B$ είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν ο πίνακας B είναι της μορφής

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

όπου τα b_1 και b_2 μπορούν να παίρνουν αυθαίρετες τιμές. $\triangle$

Παράδειγμα 4 Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν τα b_1, b_2 και b_3 ώστε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & b_1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & b_2 \\ x_1 & & & + & 8x_3 & = & b_3 \end{array}$$

να είναι συμβιβαστό;

Λύση. Ο επαυξημένος πίνακας είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{bmatrix}$$

Ανάγοντάς τον σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή παίρνουμε τον πίνακα (επιβεβαιώστε το)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40b_1 + 16b_2 + 9b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 13b_1 - 5b_2 - 3b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 5b_1 - 2b_2 - b_3 \end{bmatrix}$$

Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχουν περιορισμοί για τα b_1, b_2 και b_3, δηλαδή το σύστημα έχει τη μοναδική λύση

$$x_1 = -40b_1 + 16b_2 + 9b_3, \quad x_2 = 13b_1 - 5b_2 - 3b_3, \quad x_3 = 5b_1 - 2b_2 - b_3 \tag{2}$$

για κάθε B. $\triangle$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Εφόσον το σύστημα $AX = B$ στο προηγούμενο παράδειγμα είναι συμβιβαστό για κάθε B, παίρνουμε από το Θεώρημα 1.7.3 ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Αφήνεται στον αναγνώστη να επιβεβαιώσει ότι υπολογίζοντας τον $X = A^{-1}B$ παίρνουμε τους τύπους της (2).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 1.7

Στις Ασκήσεις 1-8 λύστε το σύστημα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Παραδείγματος 1.

1. $$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ 5x_1 & + & 6x_2 & = & 9 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rcrcr} 4x_1 & - & 3x_2 & = & -3 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & = & 9 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

4. $$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array}$$

5. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 5 \\ x & + & y & - & 4z & = & 10 \\ -4x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

6. $$\begin{array}{rcrcrcrcr} & - & x & - & 2y & - & 3z & = & 0 \\ w & + & x & + & 4y & + & 4z & = & 7 \\ w & + & 3x & + & 7y & + & 9z & = & 4 \\ -w & - & 2x & - & 4y & - & 6z & = & 6 \end{array}$$

7. $$\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & 5x_2 & = & b_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & b_2 \end{array}$$

8. $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & b_1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & = & b_2 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & b_3 \end{array}$$

9. Να λυθεί το παρακάτω σύστημα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Παραδείγματος 1.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & b_1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & b_2 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & b_3 \end{array}$$

Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα για να βρείτε τη λύση αν

(α) $b_1 = -1, b_2 = 3, b_3 = 4$ (β) $b_1 = 5, b_2 = 0, b_3 = 0$ (γ) $b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = 3$

10. Να λυθούν τα τρία συστήματα της Άσκησης 9 με τη μέθοδο του Παραδείγματος 2.

Στις Ασκήσεις 11-14 χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Παραδείγματος 2 για να λύσετε τα συστήματα ταυτόχρονα για όλες τις τιμές των σταθερών b.

11. $$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & 5x_2 & = & b_1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & = & b_2 \end{array}$$

(α) $b_1 = 1, b_2 = 4$
(β) $b_1 = -2, b_2 = 5$

12. $$\begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & b_1 \\ x_1 & + & 9x_2 & - & 2x_3 & = & b_2 \\ 6x_1 & + & 4x_2 & - & 8x_3 & = & b_3 \end{array}$$

(α) $b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 0$
(β) $b_1 = -3, b_2 = 4, b_3 = -5$

13. $$\begin{array}{rcrcl} 4x_1 & - & 7x_2 & = & b_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & b_2 \end{array}$$

(α) $b_1 = 0, b_2 = 1$
(β) $b_1 = -4, b_2 = 6$
(γ) $b_1 = -1, b_2 = 3$
(δ) $b_1 = -5, b_2 = 1$

14. $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & b_1 \\ -x_1 & - & 2x_2 & & & = & b_2 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & b_3 \end{array}$$

(α) $b_1 = 1, b_2 = 0, b_3 = -1$
(β) $b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 1$
(γ) $b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = 0$

15. Η μέθοδος του Παραδείγματος 2 μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για γραμμικά συστήματα με άπειρες λύσεις. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο αυτή για να λύσετε ταυτόχρονα τα δύο παρακάτω συστήματα.

(α)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

(β)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Στις Ασκήσεις 16-19 να βρεθούν οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα b ώστε το σύστημα να είναι συμβιβαστό.

16.
$$\begin{array}{rcrcr} 6x_1 & - & 4x_2 & = & b_1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & = & b_2 \end{array}$$

17.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & b_1 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 8x_3 & = & b_2 \\ -3x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & b_3 \end{array}$$

18.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & b_1 \\ -4x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & b_2 \\ -4x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & b_3 \end{array}$$

19.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & b_1 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & = & b_2 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & b_3 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & b_4 \end{array}$$

20. Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(α) Δείξτε ότι η εξίσωση $AX = X$ μπορεί να ξαναγραφτεί στη μορφή $(A - I)X = 0$ και χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα αυτό για να λύσετε ως προς X την $AX = X$.
(β) Λύστε την $AX = 4X$.

21. Να λυθεί ως προς X η παρακάτω εξίσωση πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

22. Εξετάστε (χωρίς να κάνετε πράξεις) αν τα παρακάτω δύο ομογενή συστήματα έχουν μη τετριμμένες λύσεις. Κατόπιν εξετάστε αν οι δύο πίνακες είναι αντιστρέψιμοι.

(α)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & 5x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & & & & & 3x_4 & = & 0 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(β)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & & & 7x_4 & = & 0 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

23. Έστω ότι το $AX = 0$ είναι ένα ομογενές σύστημα n γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους το οποίο έχει μόνο την τετριμμένη λύση. Δείξτε ότι αν ο k είναι οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος, τότε το σύστημα $A^k X = 0$ έχει επίσης μόνο την τετριμμένη λύση.

24. Έστω ότι το $AX = 0$ είναι ένα ομογενές σύστημα n γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους και έστω ότι ο Q είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Δείξτε ότι το $AX = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση αν και μόνο αν το $(QA)X = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση.

25. Δείξτε ότι ένας $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν μπορεί να γραφτεί σα γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

26. Χρησιμοποιήστε το (α) του Θεωρήματος 1.7.2 για να αποδείξετε το (β) του ίδιου θεωρήματος.

1.8 Λυμένες Ασκήσεις στο Κεφάλαιο 1

1. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα (με απαλοιφή Gauss-Jordan ή με απαλοιφή Gauss και προς τα πίσω αντικατάσταση):

(α)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & - & w & = & -1 \\ 2x & + & y & - & 2z & - & 2w & = & -2 \\ -x & + & 2y & - & 4z & + & w & = & 1 \\ 3x & & & & & - & 3w & = & -3 \end{array},$$

(β)
$$\begin{array}{rcrcrcr} & - & 2b & + & 3c & = & 1 \\ 3a & + & 6b & - & 3c & = & -2 \\ 6a & + & 6b & + & 3c & = & 5 \end{array},$$

(γ)
$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & = & -2 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \end{array}.$$

(α) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & - & w & = & -1 \\ 2x & + & y & - & 2z & - & 2w & = & -2 \\ -x & + & 2y & - & 4z & + & w & = & 1 \\ 3x & & & & & - & 3w & = & -3 \end{array}$$

είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

1ος τρόπος: Με απαλοιφή Gauss-Jordan βρίσκουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -2 φορές την 1η γραμμή στη 2η, 1 φορά την 1η γραμμή στην 3η και -3 φορές την 1η γραμμή στην 4η.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη 2η γραμμή με $\frac{1}{3}$.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -1 φορά τη 2η γραμμή στην 3η και -3 φορές τη 2η γραμμή στην 4η.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Προσθέτουμε 1 φορά τη 2η γραμμή στην 1η.

Άρα η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι το

$$\begin{array}{ccccccccc} x & & & & & - & w & = & -1 \\ & & y & - & 2z & & & = & 0 \end{array}$$

(η 3η και η 4η γραμμή του πίνακα αντιστοιχούν στην εξίσωση

$$0x + 0y + 0z + 0w = 0$$

η οποία επαληθεύεται από όλα τα x, y, z, w και για αυτό το λόγο την παραλείπουμε). Οι βασικές μεταβλητές είναι οι x και y και οι ελεύθερες οι z και w. Λύνουμε ώς προς τις βασικές μεταβλητές x και y και παίρνουμε

$$\begin{array}{rcl} x & = & -1 + w \\ y & = & 2z \end{array}.$$

Δίνοντας αυθαίρετες τιμές στις ελεύθερες μεταβλητές z και w παίρνουμε ότι η λύση του συστήματος είναι η

$$x = -1 + s,\ y = 2t,\ z = t,\ w = s, \qquad t, s \text{ στο } \mathbb{R}.$$

2ος τρόπος: Με απαλοιφή Gauss βρίσκουμε την κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -2 φορές την 1η γραμμή στη 2η, 1 φορά την 1η γραμμή στην 3η και -3 φορές την 1η γραμμή στην 4η.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη 2η γραμμή με $\frac{1}{3}$.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Προσθέτουμε -1 φορά τη 2η γραμμή στην 3η και -3 φορές τη 2η γραμμή στην 4η.

Άρα η κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι το

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & - & w & = & -1 \\ & & y & - & 2z & & & = & 0 \end{array}$$

(η 3η και η 4η γραμμή του πίνακα αντιστοιχούν στην εξίσωση

$$0x + 0y + 0z + 0w = 0$$

η οποία επαληθεύεται από όλα τα x, y, z, w και για αυτό το λόγο την παραλείπουμε). Θα λύσουμε το σύστημα αυτό με προς τα πίσω αντικατάσταση. Οι βασικές μεταβλητές είναι οι x και y και οι ελεύθερες οι z και w. Λύνουμε ώς προς τις βασικές μεταβλητές x και y και παίρνουμε

$$\begin{array}{rcl} x & = & -1 + y - 2z + w \\ y & = & 2z \end{array}.$$

Αντικαθιστώντας τη 2η εξίσωση στην 1η παίρνουμε

$$\begin{array}{rcl} x & = & -1 + w \\ y & = & 2z \end{array}.$$

Δίνοντας αυθαίρετες τιμές στις ελεύθερες μεταβλητές z και w παίρνουμε ότι η λύση του συστήματος είναι η

$$x = -1 + s,\ y = 2t,\ z = t,\ w = s, \qquad t, s \text{ στο } \mathbb{R}.$$

(β) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$\begin{array}{rcrcrcr} & - & 2b & + & 3c & = & 1 \\ 3a & + & 6b & - & 3c & = & -2 \\ 6a & + & 6b & + & 3c & = & 5 \end{array}$$

είναι ο

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Με απαλοιφή Gauss βρίσκουμε την κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Εναλλάσσουμε την 1η και τη 2η γραμμή.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την 1η γραμμή με $\frac{1}{3}$.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -6 φορές την 1η γραμμή στην 3η.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -6 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την 2η γραμμή με $-\frac{1}{2}$.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Προσθέτουμε 6 φορές τη 2η γραμμή στην 3η.

Η 3η γραμμή του πίνακα αντιστοιχεί στη εξίσωση

$$0a + 0b + 0c = 5$$

η οποία δεν επαληθεύεται για καμία τιμή των a, b, c. Άρα το σύστημα δεν είναι συμβιβαστό.

(γ) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & = & -2 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \end{array}$$

είναι ο

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

1ος τρόπος: Με απαλοιφή Gauss-Jordan βρίσκουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την 1η γραμμή με $\frac{1}{2}$.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -2 φορές την 1η γραμμή στη 2η και -4 φορές την 1η γραμμή στην 3η.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη 2η γραμμή με $\frac{1}{4}$.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -4 φορές τη 2η γραμμή στην 3η.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Προσθέτουμε $\frac{3}{2}$ φορές τη 2η γραμμή στην 1η.

Άρα η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι το

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= \frac{1}{8} \\ x_2 &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(η 3η γραμμή του πίνακα αντιστοιχεί στην εξίσωση

$$0x_1 + 0x_2 = 0$$

η οποία επαληθεύεται από όλα τα x_1, x_2 και για αυτό το λόγο την παραλείπουμε).

Είναι προφανές ότι η λύση του συστήματος είναι

$$x_1 = \frac{1}{8},\ x_2 = \frac{3}{4}.$$

2ος τρόπος: Με απαλοιφή Gauss βρίσκουμε την κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την 1η γραμμή με $\frac{1}{2}$.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -2 φορές την 1η γραμμή στη 2η και -4 φορές την 1η γραμμή στην 3η.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη 2η γραμμή με $\frac{1}{4}$.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -4 φορές τη 2η γραμμή στην 3η.

Άρα η κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι το

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{3}{2}x_2 &= -1 \\ x_2 &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(η 3η γραμμή του πίνακα αντιστοιχεί στην εξίσωση

$$0x_1 + 0x_2 = 0$$

η οποία επαληθεύεται από όλα τα x_1, x_2 και για αυτό το λόγο την παραλείπουμε). Λύνουμε το σύστημα με προς τα πίσω αντικατάσταση. Οι βασικές μεταβλητές είναι οι x_1 και x_2 και δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές. Λύνουμε ώς προς τις βασικές μεταβλητές x_1 και x_2 και παίρνουμε

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 + \frac{3}{2}x_2 \\ x_2 &= \frac{3}{4} \end{aligned}.$$

Αντικαθιστώντας τη 2η εξίσωση στην 1η παίρνουμε

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \dfrac{1}{8} \\ x_2 & = & \dfrac{3}{4} \end{array}.$$

Επομένως η λύση του συστήματος είναι

$$x_1 = \frac{1}{8},\ x_2 = \frac{3}{4}.$$

2. Θεωρήστε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & 0 \\ cx & + & dy & = & 0 \\ ex & + & fy & = & 0 \end{array}.$$

Εξετάστε τις σχετικές θέσεις των ευθειών $ax + by = 0$, $cx + dy = 0$ και $ex + fy = 0$ όταν:

(α) το σύστημα έχει μόνο την τετριμμένη λύση.

(β) το σύστημα έχει μη τετριμμένες λύσεις.

Έστω l_1, l_2, l_3 οι ευθείες με εξισώσεις

$$\begin{array}{l} l_1 : ax + by = 0, \\ l_2 : cx + dy = 0, \\ l_3 : ex + fy = 0. \end{array}$$

Το σύνολο λύσεων του συστήματος

$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & 0 \\ cx & + & dy & = & 0 \\ ex & + & fy & = & 0 \end{array}. \tag{1}$$

ταυτίζεται με το σύνολο των κοινών σημείων των ευθειών l_1, l_2, l_3. Προφανώς οι l_1, l_2, l_3 διέρχονται από την αρχή των αξόνων και άρα έχουν πάντα ένα κοινό σημείο, το $(0, 0)$.

(α) Αν το σύστημα (1) έχει μόνο την τετριμμένη λύση

$$x = 0,\ y = 0,$$

τότε το μοναδικό κοινό σημείο των l_1, l_2, l_3 είναι το $(0, 0)$. Αυτό μπορεί να συμβαίνει αν:

(1) Οι l_1, l_2, l_3 είναι ανά δύο διαφορετικές.

(2) Οι l_1 και l_2 ταυτίζονται και η l_3 είναι διαφορετική από τις l_1 και l_2.

(3) Οι l_1 και l_3 ταυτίζονται και η l_2 είναι διαφορετική από τις l_1 και l_3.

(4) Οι l_2 και l_3 ταυτίζονται και η l_1 είναι διαφορετική από τις l_2 και l_3.

(β) Αν το σύστημα (1) έχει μη τετριμμένες λύσεις, τότε θα έχει άπειρες λύσεις. Άρα οι l_1, l_2, l_3 έχουν άπειρα κοινά σημεία. Αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο αν:

(5) Οι l_1, l_2, l_3 ταυτίζονται.

3. Για ποιες τιμές του λ έχει το ομογενές σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 7x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 11x_2 & + & \lambda x_3 & = & 0 \end{array}$$

μη τετριμμένες λύσεις;

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 7x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 11x_2 & + & \lambda x_3 & = & 0 \end{array}$$

είναι ο

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 7 & -1 \\ 4 & -11 & \lambda \end{bmatrix}$$

(παραλείπουμε την τελευταία στήλη που αποτελείται αποκλειστικά από 0, εφόσον δεν επηρεάζεται από καμία στοιχειώδη διαδικασία γραμμών).

Ξεκινάμε με τα πρώτα βήματα της απαλοιφής Gauss:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 7 & -1 \\ 4 & -11 & \lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -1 & 7 & -1 \\ 4 & -11 & \lambda \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την 1η γραμμή με $\frac{1}{2}$.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -5 & \lambda - 10 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε 1 φορά την 1η γραμμή στη 2η και -4 φορές την 1η γραμμή στην 3η.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{11} \\ 0 & -5 & \lambda - 10 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη 2η γραμμή με $\frac{2}{11}$.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{11} \\ 0 & 0 & \lambda - \frac{95}{11} \end{bmatrix}.$$

Προσθέτουμε 5 φορές τη 2η γραμμή στην 3η.

Το ομογενές σύστημα που αντιστοιχεί στον τελευταίο πίνακα είναι το

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & \frac{3}{2}\, x_2 & + & \frac{3}{2}\, x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & \frac{3}{11}\, x_3 & = & 0 \\ & & & & \left(\lambda - \frac{95}{11}\right) x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Αν $\lambda - \dfrac{95}{11} = 0$, τότε η 3η εξίσωση είναι η

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

η οποία επαληθεύεται από όλα τα x_1, x_2, x_3 και για αυτό το λόγο μπορούμε να την παραλείψουμε. Άρα παίρνουμε το ομογενές σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & \frac{3}{2}\, x_2 & + & \frac{3}{2}\, x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & \frac{3}{11}\, x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Εφόσον το σύστημα αυτό έχει 2 εξισώσεις και 3 μεταβλητές, θα έχει μη τετριμμένες λύσεις.

Αν $\lambda - \dfrac{95}{11} \neq 0$, τότε πολλαπλασιάζοντας την 3η εξίσωση με $\dfrac{1}{\lambda - \frac{95}{11}}$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & \frac{3}{2}\, x_2 & + & \frac{3}{2}\, x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & \frac{3}{11}\, x_3 & = & 0 \\ & & & & x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Αντικαθιστώντας την 3η εξίσωση στη 2η και την 1η παίρνουμε

$$\begin{array}{rcrrcl} x_1 & - & \frac{3}{2}x_2 & & = & 0 \\ & & x_2 & & = & 0 \\ & & & x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Αντικαθιστώντας τη 2η εξίσωση στην 1η παίρνουμε

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & & & = & 0 \\ & x_2 & & = & 0 \\ & & x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Άρα το σύστημα έχει μόνο την τετριμμένη λύση.

Επομένως το σύστημα έχει μη τετριμμένες λύσεις για $\lambda = \dfrac{95}{11}$.

4. Να γραφτεί ο 4×4 πίνακας A του οποίου τα στοιχεία ικανοποιούν τη συνθήκη

$$a_{ij} = \begin{cases} i^j, & \text{αν} \quad |i-j| \le 1 \\ 0, & \text{αν} \quad |i-j| > 1 \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Έχουμε

$$\begin{array}{lll}
a_{11} = 1^1 = 1, & \text{εφόσον} & |1-1| = 0 \leq 1, \\
a_{12} = 1^2 = 1, & \text{εφόσον} & |1-2| = 1 \leq 1, \\
a_{13} = 0, & \text{εφόσον} & |1-3| = 2 > 1, \\
a_{14} = 0, & \text{εφόσον} & |1-4| = 3 > 1, \\
a_{21} = 2^1 = 2, & \text{εφόσον} & |2-1| = 1 \leq 1, \\
a_{22} = 2^2 = 4, & \text{εφόσον} & |2-2| = 0 \leq 1, \\
a_{23} = 2^3 = 8, & \text{εφόσον} & |2-3| = 1 \leq 1, \\
a_{24} = 0, & \text{εφόσον} & |2-4| = 2 > 1, \\
a_{31} = 0, & \text{εφόσον} & |3-1| = 2 > 1, \\
a_{32} = 3^2 = 9, & \text{εφόσον} & |3-2| = 1 \leq 1, \\
a_{33} = 3^3 = 27, & \text{εφόσον} & |3-3| = 0 \leq 1, \\
a_{34} = 3^4 = 81, & \text{εφόσον} & |3-4| = 1 \leq 1, \\
a_{41} = 0, & \text{εφόσον} & |4-1| = 3 > 1, \\
a_{42} = 0, & \text{εφόσον} & |4-2| = 2 > 1, \\
a_{43} = 4^3 = 64, & \text{εφόσον} & |4-3| = 1 \leq 1, \\
a_{44} = 4^4 = 256, & \text{εφόσον} & |4-4| = 0 \leq 1.
\end{array}$$

Άρα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 9 & 27 & 81 \\ 0 & 0 & 64 & 256 \end{bmatrix}.$$

5. Έστω ότι οι A, B, C, D, E είναι πίνακες με τις ακόλουθες διαστάσεις:

$$\begin{array}{ccccc}
A & B & C & D & E \\
(4 \times 5) & (4 \times 5) & (5 \times 2) & (4 \times 2) & (5 \times 4)
\end{array}$$

Να εξεταστεί ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις ορίζονται. Για όσες δεν ορίζονται, εξηγήστε γιατί δεν ορίζονται. Για αυτές που ορίζονται, να βρεθούν οι διαστάσεις του πίνακα που προκύπτει.

(α) BA (β) $AC + D$ (γ) $AE + B$ (δ) $AB + B$

(ε) $E(A + B)$ (στ) $E(AC)$ (ζ) $E^t A$ (η) $(A^t + E)D$

(α) Εφόσον ο B έχει 5 στήλες και ο A έχει 4 γραμμές, ο BA δεν ορίζεται.

(β) Εφόσον ο A είναι 4×5 και ο C είναι 5×2, ο AC ορίζεται και είναι 4×2. Εφόσον οι AC και D είναι 4×2, ο $AC + D$ ορίζεται και είναι 4×2.

(γ) Εφόσον ο A είναι 4×5 και ο E είναι 5×4, ο AE ορίζεται και είναι 4×4. Εφόσον ο AE είναι 4×4 και ο B είναι 4×5, ο $AE + B$ δεν ορίζεται.

(δ) Εφόσον ο A έχει 5 στήλες και ο B έχει 4 γραμμές, ο AB δεν ορίζεται. Άρα και ο $AB + B$ δεν ορίζεται.

(ε) Εφόσον οι A και B είναι 4×5, ο $A + B$ ορίζεται και είναι 4×5. Εφόσον ο E είναι 5×4 και ο $A + B$ είναι 4×5, ο $E(A + B)$ ορίζεται και είναι 5×5.

(στ) Εφόσον ο A είναι 4×5 και ο C είναι 5×2, ο AC ορίζεται και είναι 4×2. Εφόσον ο E είναι 5×4 και ο AC είναι 4×2, ο $E(AC)$ ορίζεται και είναι 5×2.

(ζ) Εφόσον ο E είναι 5×4, ο E^t είναι 4×5. Εφόσον ο E^t έχει 5 στήλες και ο A έχει 4 γραμμές, ο $E^t A$ δεν ορίζεται.

(η) Εφόσον ο A είναι 4×5, ο A^t είναι 5×4. Εφόσον οι A^t και E είναι 5×4, ο $A^t + E$ ορίζεται και είναι 5×4. Εφόσον ο $A^t + E$ είναι 5×4 και ο D είναι 4×2, ο $(A^t + E)D$ ορίζεται και είναι 5×2.

6. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix}.$$

(α) Να υπολογιστούν οι DA και AE.

(β) Να υπολογιστεί ο E^3.

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} DA &= \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} & d_1 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{22} & d_1 \cdot a_{13} + 0 \cdot a_{23} \\ 0 \cdot a_{11} + d_2 \cdot a_{21} & 0 \cdot a_{12} + d_2 \cdot a_{22} & 0 \cdot a_{13} + d_2 \cdot a_{23} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_1 \cdot a_{11} & d_1 \cdot a_{12} & d_1 \cdot a_{13} \\ d_2 \cdot a_{21} & d_2 \cdot a_{22} & d_2 \cdot a_{23} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} AE &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot e_1 + a_{12} \cdot 0 + a_{13} \cdot 0 & a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot e_2 + a_{13} \cdot 0 & a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 0 + a_{13} \cdot e_3 \\ a_{21} \cdot e_1 + a_{22} \cdot 0 + a_{23} \cdot 0 & a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot e_2 + a_{23} \cdot 0 & a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 0 + a_{23} \cdot e_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot e_1 & a_{12} \cdot e_2 & a_{13} \cdot e_3 \\ a_{21} \cdot e_1 & a_{22} \cdot e_2 & a_{23} \cdot e_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(β) Έχουμε

$$
\begin{aligned}
E^3 &= EEE \\
&= \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e_1 \cdot e_1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & e_1 \cdot 0 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot 0 & e_1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot e_3 \\ 0 \cdot e_1 + e_2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + e_2 \cdot e_2 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + e_2 \cdot 0 + 0 \cdot e_3 \\ 0 \cdot e_1 + 0 \cdot 0 + e_3 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot e_2 + e_3 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + e_3 \cdot e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & e_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e_1^2 \cdot e_1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & e_1^2 \cdot 0 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot 0 & e_1^2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot e_3 \\ 0 \cdot e_1 + e_2^2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + e_2^2 \cdot e_2 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + e_2^2 \cdot 0 + 0 \cdot e_3 \\ 0 \cdot e_1 + 0 \cdot 0 + e_3^2 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot e_2 + e_3^2 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + e_3^2 \cdot e_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & e_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & e_3^3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

7. Αν

$$
A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix},
$$

να υπολογιστούν τα παρακάτω:

(α) $-3(D + 2E)$ (β) $2A^t + C$ (γ) $\dfrac{1}{2}\, C^t - \dfrac{1}{4}\, A$

(δ) AB (ε) $(AB)C$ (στ) $(C^tB)A^t$

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned}
-3(D+2E) &= -3\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right) \\
&= -3\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\cdot 6 & 2\cdot 1 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot(-1) & 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 1 & 2\cdot 3 \end{bmatrix}\right) \\
&= -3\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 6 \end{bmatrix}\right) \\
&= -3\begin{bmatrix} 1+12 & 5+2 & 2+6 \\ (-1)+(-2) & 0+2 & 1+4 \\ 3+8 & 2+2 & 4+6 \end{bmatrix} \\
&= -3\begin{bmatrix} 13 & 7 & 8 \\ -3 & 2 & 5 \\ 11 & 4 & 10 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (-3)\cdot 13 & (-3)\cdot 7 & (-3)\cdot 8 \\ (-3)\cdot(-3) & (-3)\cdot 2 & (-3)\cdot 5 \\ (-3)\cdot 11 & (-3)\cdot 4 & (-3)\cdot 10 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -39 & -21 & -24 \\ 9 & -6 & -15 \\ -33 & -12 & -30 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned}
2A^t + C &= 2\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \\
&= 2\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2\cdot 3 & 2\cdot(-1) & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 2 & 2\cdot 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6+1 & (-2)+4 & 2+2 \\ 0+3 & 4+1 & 2+5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(γ) Έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,C^t - \frac{1}{4}\,A &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}^t - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cdot 1 & \frac{1}{2}\cdot 3 \\ \frac{1}{2}\cdot 4 & \frac{1}{2}\cdot 1 \\ \frac{1}{2}\cdot 2 & \frac{1}{2}\cdot 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\cdot 3 & \frac{1}{4}\cdot 0 \\ \frac{1}{4}\cdot(-1) & \frac{1}{4}\cdot 2 \\ \frac{1}{4}\cdot 1 & \frac{1}{4}\cdot 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\frac{3}{4} & \frac{3}{2}-0 \\ 2-\left(-\frac{1}{4}\right) & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ 1-\frac{1}{4} & \frac{5}{2}-\frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(δ) Έχουμε

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3\cdot 4 + 0\cdot 0 & 3\cdot(-1) + 0\cdot 2 \\ (-1)\cdot 4 + 2\cdot 0 & (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 2 \\ 1\cdot 4 + 1\cdot 0 & 1\cdot(-1) + 1\cdot 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(ε) Έχουμε

$$\begin{aligned}
(AB)C &= \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad [\text{από (δ)}] \\
&= \begin{bmatrix} 12\cdot 1 + (-3)\cdot 3 & 12\cdot 4 + (-3)\cdot 1 & 12\cdot 2 + (-3)\cdot 5 \\ (-4)\cdot 1 + 5\cdot 3 & (-4)\cdot 4 + 5\cdot 1 & (-4)\cdot 2 + 5\cdot 5 \\ 4\cdot 1 + 1\cdot 3 & 4\cdot 4 + 1\cdot 1 & 4\cdot 2 + 1\cdot 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(στ) Έχουμε

$$\begin{aligned}
(C^tB)A^t &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^t \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1\cdot 4 + 3\cdot 0 & 1\cdot(-1) + 3\cdot 2 \\ 4\cdot 4 + 1\cdot 0 & 4\cdot(-1) + 1\cdot 2 \\ 2\cdot 4 + 5\cdot 0 & 2\cdot(-1) + 5\cdot 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 16 & -2 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4\cdot 3 + 5\cdot 0 & 4\cdot(-1) + 5\cdot 2 & 4\cdot 1 + 5\cdot 1 \\ 16\cdot 3 + (-2)\cdot 0 & 16\cdot(-1) + (-2)\cdot 2 & 16\cdot 1 + (-2)\cdot 1 \\ 8\cdot 3 + 8\cdot 0 & 8\cdot(-1) + 8\cdot 2 & 8\cdot 1 + 8\cdot 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 12 & 6 & 9 \\ 48 & -20 & 14 \\ 24 & 8 & 16 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

8. (α) Να λυθεί ως προς X η εξίσωση πινάκων

$$X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(β) Να λυθεί ως προς X η εξίσωση πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(α) Εφόσον το γινόμενο

$$X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ορίζεται, ο πίνακας X έχει 2 στήλες. Εφόσον το γινόμενο αυτό είναι ένας 2×2 πίνακας, ο X έχει 2 γραμμές. Άρα ο X είναι ένας 2×2 πίνακας. Έστω

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} X\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a+b & a+2b \\ c+d & c+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a+b & = & 1 \\ a+2b & = & 1 \\ c+d & = & 1 \\ c+2d & = & 1 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrrcrcl} a & + & b & & & & = & 1 \\ a & + & 2b & & & & = & 1 \\ & & & c & + & d & = & 1 \\ & & & c & + & 2d & = & 1 \end{array}. \end{aligned}$$

Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcrrcrcl} a & + & b & & & & = & 1 \\ a & + & 2b & & & & = & 1 \\ & & & c & + & d & = & 1 \\ & & & c & + & 2d & = & 1 \end{array}.$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Με απαλοιφή Gauss-Jordan βρίσκουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \boxed{\text{Προσθέτουμε -1 φορά την 1η γραμμή στη 2η.}} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boxed{\text{Προσθέτουμε -1 φορά την 3η γραμμή στην 4η.}} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boxed{\text{Προσθέτουμε -1 φορά την 4η γραμμή στην 3η.}} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \boxed{\text{Προσθέτουμε -1 φορά τη 2η γραμμή στην 1η.}}
\end{aligned}$$

Άρα η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι το

$$\begin{array}{cccccc}
a & & & & = & 1 \\
 & b & & & = & 0 \\
 & & c & & = & 1 \\
 & & & d & = & 0
\end{array}$$

και άρα η λύση του συστήματος είναι η

$$a = 1,\ b = 0,\ c = 1,\ d = 0.$$

Επομένως η λύση της εξίσωσης πινάκων

$$X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Σημείωση: Εναλλακτικα μπορούμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{array}{ccccccccc}
a & + & b & & & & & = & 1 \\
a & + & 2b & & & & & = & 1 \\
 & & & & c & + & d & = & 1 \\
 & & & & c & + & 2d & = & 1
\end{array}.$$

με δύο ακόμα τρόπους:

1ος τρόπος: Με απαλοιφή Gauss βρίσκουμε την κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \boxed{\text{Προσθέτουμε -1 φορά την 1η γραμμή στη 2η.}}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \boxed{\text{Προσθέτουμε -1 φορά την 3η γραμμή στην 4η.}}$$

Άρα η κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι το

$$\begin{array}{ccccccccc} a & + & b & & & & & = & 1 \\ & & b & & & & & = & 0 \\ & & & & c & + & d & = & 1 \\ & & & & & & d & = & 0 \end{array}$$

το οποίο θα λύσουμε με προς τα πίσω αντικατάσταση. Όλες οι μεταβλητές είναι βασικές. Λύνοντας την 1η εξίσωση ως προς a, την 2η ως προς b, την 3η ως προς c και την 4η ως προς d παίρνουμε

$$\begin{array}{ccc} a & = & 1-b \\ b & = & 0 \\ c & = & 1-d \\ d & = & 0 \end{array}.$$

Αντικαθιστώντας την 4η εξίσωση στην 3η παίρνουμε

$$\begin{array}{ccc} a & = & 1-b \\ b & = & 0 \\ c & = & 1 \\ d & = & 0 \end{array}.$$

Αντικαθιστώντας τη 2η εξίσωση στην 1η παίρνουμε

$$\begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b & = & 0 \\ c & = & 1 \\ d & = & 0 \end{array}$$

και άρα η λύση του συστήματος είναι η

$$a = 1,\ b = 0,\ c = 1,\ d = 0.$$

2ος τρόπος: Οι δύο πρώτες εξισώσεις του συστήματος

$$\begin{array}{ccccccccc} a & + & b & & & & & = & 1 \\ a & + & 2b & & & & & = & 1 \\ & & & & c & + & d & = & 1 \\ & & & & c & + & 2d & = & 1 \end{array}.$$

περιέχουν μόνο τις μεταβλητές a και b, ενώ οι δύο τελευταίες μόνο τις μεταβλητές c και d. Άρα το σύστημα αποτελείται απο δύο συστήματα, τα

$$\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 1 \\ a & + & 2b & = & 1 \end{array}$$

και

$$\begin{array}{ccccc} c & + & d & = & 1 \\ c & + & 2d & = & 1 \end{array}.$$

Ξεκινάμε λύνοντας το πρώτο. Ο επαυξημένος του πίνακας είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Με απαλοιφή Gauss-Jordan βρίσκουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ Προσθέτουμε -1 φορά την 1η γραμμή στη 2η.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$ Προσθέτουμε -1 φορά τη 2η γραμμή στην 1η.

Άρα η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι το

$$\begin{array}{ccc} a & & = 1 \\ & b & = 0 \end{array}$$

και άρα η λύση του συστήματος είναι η

$$a = 1, \ b = 0.$$

Συνεχίζουμε λύνοντας το δεύτερο. Ο επαυξημένος του πίνακας είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Με απαλοιφή Gauss-Jordan βρίσκουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ Προσθέτουμε -1 φορά την 1η γραμμή στη 2η.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$ Προσθέτουμε -1 φορά τη 2η γραμμή στην 1η.

Άρα η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι το

$$\begin{array}{rcrcl} c & & & = & 1 \\ & & d & = & 0 \end{array}$$

και άρα η λύση του συστήματος είναι η

$$c = 1,\ d = 0.$$

Επομένως η λύση του συστήματος

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & b & & & & & = & 1 \\ a & + & 2b & & & & & = & 1 \\ & & & & c & + & d & = & 1 \\ & & & & c & + & 2d & = & 1 \end{array}$$

είναι

$$a = 1,\ b = 0,\ c = 1,\ d = 0.$$

(β) Εφόσον ορίζεται το γινόμενο

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ορίζονται τα γινόμενα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} X \text{ και } X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Εφόσον ορίζεται το γινόμενο

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} X,$$

ο X έχει 3 γραμμές. Εφόσον ορίζεται το γινόμενο

$$X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ο X έχει 3 στήλες. Άρα ο X είναι 3×3. Έστω

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ -3g & -3h & -3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & c & b \\ 2d & 2f & 2e \\ -3g & -3i & -3h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ c &= 2 \\ b &= 3 \\ 2d &= 4 \\ 2f &= 5 \\ 2e &= 4 \\ -3g &= 3 \\ -3i &= 2 \\ -3h &= 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = 1,\ c = 2,\ b = 3,\ d = 2,\ f = \frac{5}{2},\ e = 2,\ g = -1,\ i = -\frac{2}{3},\ h = -\frac{1}{3}.$$

Επομένως η λύση της εξίσωσης πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & \frac{5}{2} \\ -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

9. Έστω A και B δύο πίνακες. Τι πρέπει να συμβαίνει για να ορίζεται ο πίνακας $AB + BA$;

Για να ορίζεται ο πίνακας $AB + BA$ πρέπει:

(I) Να ορίζεται ο πίνακας AB.

(II) Να ορίζεται ο πίνακας BA.

(III) Να έχουν ίδιες διαστάσεις οι πίνακες AB και BA.

Έστω ότι ο A είναι $m \times n$ και ο B είναι $r \times s$.

Για να ορίζεται ο πίνακας AB πρέπει το πλήθος των στηλών του A να ισούται με το πλήθος των γραμμών του B. Πρέπει λοιπόν

$$n = r.$$

Για να ορίζεται ο πίνακας BA πρέπει το πλήθος των στηλών του B να ισούται με το πλήθος των γραμμών του A. Πρέπει λοιπόν

$$s = m.$$

Από όσα είπαμε παραπάνω, αν $n = r$ και $s = m$, τότε οι πίνακες AB και BA ορίζονται. Ο πίνακας AB είναι $m \times s$ και ο πίνακας BA είναι $r \times n$. Άρα για να έχουν ίδιες διαστάσεις οι πίνακες AB και BA πρέπει

$$m = r \text{ και } s = n.$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω παίρνουμε ότι για να ορίζεται ο πίνακας $AB+BA$ πρέπει

$$n = r, \; s = m, \; m = r \text{ και } s = n.$$

Άρα πρέπει

$$m = n = r = s.$$

Πρέπει λοιπόν οι πίνακες A και B να είναι τετραγωνικοί πίνακες με τις ίδιες διαστάσεις.

10. (α) Να γραφτεί σαν εξίσωση πινάκων το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 6x_3 & = & -7 \\ -2x_1 & & & - & 3x_3 & = & 11 \\ x_1 & - & 2x_2 & & & = & 3 \end{array}.$$

(β) Να γραφτεί σαν σύστημα η εξίσωση πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Τι συμπεραίνετε από την ισότητα

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ -12 \end{bmatrix};$$

(α) Το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 6x_3 & = & -7 \\ -2x_1 & & & - & 3x_3 & = & 11 \\ x_1 & - & 2x_2 & & & = & 3 \end{array}.$$

γράφεται

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -6 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(β) Η εξίσωση πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ -12 \end{bmatrix}$$

γράφεται

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 4y & = & 9 \\ 3x & + & 2y & = & -1 \\ 2x & + & 7y & = & -12 \end{array}.$$

Από την ισότητα

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ -12 \end{bmatrix}$$

συμπεραίνουμε ότι η

$$x = 1,\ y = -2$$

είναι μία λύση του συστήματος

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 4y & = & 9 \\ 3x & + & 2y & = & -1 \\ 2x & + & 7y & = & -12 \end{array}.$$

11. (α) Έστω A και B δύο $m \times n$ πίνακες. Αποδείξτε ότι

$$-(A - B) = B - A.$$

(β) Έστω A ένας $m \times l$ πίνακας και B ένας $l \times n$ πίνακας. Αποδείξτε ότι

$$(-A)B = -(AB).$$

(α) *1ος τρόπος:* Εφόσον οι A και B είναι $m \times n$, ο $A - B$ είναι $m \times n$ και άρα και ο $-(A-B)$ είναι $m \times n$. Εφόσον οι A και B είναι $m \times n$, ο $B - A$ είναι $m \times n$. Έχουμε ότι

$$\begin{array}{rcll} -(A-B) & = & (-1)(A-B) & [-T = (-1)T] \\ & = & (-1)A - (-1)B & [\lambda(T-S) = \lambda T - \lambda S] \\ & = & (-1)A + (-1)((-1)B) & [T - S = T + (-1)S] \\ & = & (-1)A + ((-1)(-1))B & [\lambda(\mu T) = (\lambda\mu)T] \\ & = & (-1)A + 1B & \\ & = & (-1)A + B & [1T = T] \\ & = & B + (-1)A & [T + S = S + T] \\ & = & B - A. & [T + (-1)S = T - S] \end{array}$$

2ος τρόπος: Εφόσον οι A και B είναι $m \times n$, ο $A - B$ είναι $m \times n$ και άρα και ο $-(A - B)$ είναι $m \times n$. Εφόσον οι A και B είναι $m \times n$, ο $B - A$ είναι $m \times n$. Έστω

$$A = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

και

$$B = [b_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} -(A - B) &= -\left([a_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} - [b_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}\right) \\ &= -[a_{ij} - b_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \\ &= [-(a_{ij} - b_{ij})]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \\ &= [-a_{ij} + b_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \\ &= [b_{ij} - a_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \\ &= [b_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} - [a_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \\ &= B - A. \end{aligned}$$

(β) *1ος τρόπος:* Εφόσον ο A είναι $m \times l$, ο $-A$ είναι $m \times l$. Εφόσον ο $-A$ είναι $m \times l$ και ο B είναι $l \times n$, ο $(-A)B$ είναι $m \times n$. Εφόσον ο A είναι $m \times l$ και ο B είναι $l \times n$, ο AB είναι $m \times n$ και άρα ο $-(AB)$ είναι $m \times n$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (-A)B &= ((-1)(A))B & [-T = (-1)T] \\ &= (-1)(AB) & [(\lambda T)S = \lambda(TS)] \\ &= -(AB). & [(-1)T = -T] \end{aligned}$$

2ος τρόπος: Εφόσον ο A είναι $m \times l$, ο $-A$ είναι $m \times l$. Εφόσον ο $-A$ είναι $m \times l$ και ο B είναι $l \times n$, ο $(-A)B$ είναι $m \times n$. Εφόσον ο A είναι $m \times l$ και ο B είναι $l \times n$, ο AB είναι $m \times n$ και άρα ο $-(AB)$ είναι $m \times n$. Έστω

$$A = [a_{ik}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq l}$$

και

$$B = [b_{kj}]_{1 \leq k \leq l, 1 \leq j \leq n}.$$

Τότε

$$\begin{aligned}
(-A)B &= \left(-[a_{ik}]_{1\le i\le m,1\le k\le l}\right)[b_{kj}]_{1\le k\le l,1\le j\le n}\\
&= [-a_{ik}]_{1\le i\le m,1\le k\le l}[b_{kj}]_{1\le k\le l,1\le j\le n}\\
&= [(-a_{i1})b_{1j}+(-a_{i2})b_{2j}+\cdots+(-a_{il})b_{lj}]_{1\le i\le m,1\le j\le n}\\
&= [-\left(a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}\right)]_{1\le i\le m,1\le j\le n}\\
&= -[a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}]_{1\le i\le m,1\le j\le n}\\
&= -\left([a_{ik}]_{1\le i\le m,1\le k\le l}[b_{kj}]_{1\le k\le l,1\le j\le n}\right)\\
&= -(AB).
\end{aligned}$$

12. Έστω A και B δύο $n\times n$ πίνακες. Αποδείξτε ότι αν

$$AB = BA,$$

τότε

$$A^3B^2 = B^2A^3.$$

1ος τρόπος: Εφόσον οι A και B είναι $n\times n$, οι A^3 και B^2 είναι $n\times n$. Άρα οι A^3B^2 και B^2A^3 είναι $n\times n$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
A^3B^2 &= (AAA)(BB) && [T^3=TTT \text{ και } T^2=TT]\\
&= AA(AB)B && [\text{προσεταιριστική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό πινάκων}]\\
&= AA(BA)B && [AB=BA]\\
&= A(AB)(AB) && [\text{προσεταιριστική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό πινάκων}]\\
&= A(BA)(BA) && [AB=BA]\\
&= (AB)(AB)A && [\text{προσεταιριστική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό πινάκων}]\\
&= (BA)(BA)A && [AB=BA]\\
&= B(AB)AA && [\text{προσεταιριστική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό πινάκων}]\\
&= B(BA)AA && [AB=BA]\\
&= (BB)(AAA) && [\text{προσεταιριστική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό πινάκων}]\\
&= B^2A^3. && [TT=T^2 \text{ και } TTT=T^3]
\end{aligned}$$

2ος τρόπος: Εφόσον οι A και B είναι $n\times n$, οι A^3 και B^2 είναι $n\times n$. Άρα οι A^3B^2

και B^2A^3 είναι $n \times n$. Έχουμε ότι

$$
\begin{array}{lcll}
AB = BA & \Rightarrow & A(AB) = A(BA) & \\
 & \Rightarrow & (AA)B = (AB)A & [\text{προσεταιριστική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό πινάκων}] \\
 & \Rightarrow & (AA)B = (BA)A & [AB = BA] \\
 & \Rightarrow & (AA)B = B(AA) & [\text{προσεταιριστική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό πινάκων}] \\
 & \Rightarrow & A((AA)B) = A(B(AA)) & \\
 & \Rightarrow & (AAA)B = (AB)(AA) & [\text{προσεταιριστική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό πινάκων}] \\
 & \Rightarrow & (AAA)B = (BA)(AA) & [AB = BA] \\
 & \Rightarrow & (AAA)B = B(AAA) & [\text{προσεταιριστική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό πινάκων}] \\
 & \Rightarrow & B((AAA)B) = B(B(AAA)) & \\
 & \Rightarrow & (BA)(AAB) = (BB)(AAA) & [\text{προσεταιριστική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό πινάκων}] \\
 & \Rightarrow & (AB)(AAB) = (BB)(AAA) & [AB = BA] \\
 & \Rightarrow & A(BA)(AB) = (BB)(AAA) & [\text{προσεταιριστική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό πινάκων}] \\
 & \Rightarrow & A(AB)(AB) = (BB)(AAA) & [AB = BA] \\
 & \Rightarrow & (AA)(BA)B = (BB)(AAA) & [\text{προσεταιριστική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό πινάκων}] \\
 & \Rightarrow & (AA)(AB)B = (BB)(AAA) & [AB = BA] \\
 & \Rightarrow & (AAA)(BB) = (BB)(AAA) & [\text{προσεταιριστική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό πινάκων}] \\
 & \Rightarrow & A^3B^2 = B^2A^3. & [TT = T^2 \text{ και } TTT = T^3]
\end{array}
$$

13. Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται συμμετρικός αν

$$A^t = A$$

και αντισυμμετρικός αν

$$A^t = -A.$$

(α) Αποδείξτε ότι αν οι A_1 και A_2 είναι συμμετρικοί $n \times n$ πίνακες, τότε ο $A_1 + A_2$ είναι συμμετρικός.

(β) Αποδείξτε ότι αν ο A είναι ένας αντισυμμετρικός $n \times n$ πίνακας, τότε ο A^2 είναι συμμετρικός.

(γ) Αποδείξτε ότι αν ο B είναι ένας $n \times n$ πίνακας, τότε υπάρχει ένας συμμετρικός $n \times n$ πίνακας B_1 και ένας αντισυμμετρικός $n \times n$ πίνακας B_2 με $B = B_1 + B_2$.

(α) Εφόσον οι A_1 και A_2 είναι $n \times n$, ο $A_1 + A_2$ είναι $n \times n$. Εφόσον οι A_1 και A_2 είναι συμμετρικοί θα ισχύει

$$A_1^t = A_1 \tag{2}$$

και

$$A_2^t = A_2. \tag{3}$$

Έχουμε

$$
\begin{array}{rcll}
(A_1 + A_2)^t & = & A_1^t + A_2^t & [(T+S)^t = T^t + S^t] \\
 & = & A_1 + A_2^t & [\text{από } (2)] \\
 & = & A_1 + A_2 & [\text{από } (3)]
\end{array}
$$

και επομένως ο $A_1 + A_2$ είναι συμμετρικός.

(β) Εφόσον ο A είναι $n \times n$, ο A^2 είναι $n \times n$. Εφόσον ο A είναι αντισυμμετρικός θα ισχύει

$$A^t = -A. \tag{4}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
(A^2)^t &= (AA)^t && [T^2 = TT] \\
&= A^t A^t && [(TS)^t = S^t T^t] \\
&= (-A)(-A) && [\text{από } (4)] \\
&= AA && [(-T)(-S) = TS] \\
&= A^2 && [TT = T^2]
\end{aligned}$$

και επομένως ο A^2 είναι συμμετρικός.

(γ) Έστω

$$B_1 = \frac{1}{2}\,(B + B^t)$$

και

$$B_2 = \frac{1}{2}\,(B - B^t).$$

Εφόσον ο B είναι $n \times n$, ο B^t είναι $n \times n$. Άρα οι $B + B^t$ και $B - B^t$ είναι $n \times n$. Επομένως οι B_1 και B_2 είναι $n \times n$. Εφόσον

$$\begin{aligned}
(B_1)^t &= \left(\frac{1}{2}\,(B + B^t)\right)^t \\
&= \frac{1}{2}\,(B + B^t)^t && [(\lambda T)^t = \lambda T^t] \\
&= \frac{1}{2}\,(B^t + (B^t)^t) && [(T + S)^t = T^t + S^t] \\
&= \frac{1}{2}\,(B^t + B) && [(T^t)^t = T] \\
&= \frac{1}{2}\,(B + B^t) && [T + S = S + T] \\
&= B_1,
\end{aligned}$$

ο B_1 είναι συμμετρικός. Εφόσον

$$\begin{aligned}
(B_2)^t &= \left(\frac{1}{2}\,(B-B^t)\right)^t \\
&= \frac{1}{2}\,(B-B^t)^t && [(\lambda T)^t = \lambda T^t] \\
&= \frac{1}{2}\,(B^t-(B^t)^t) && [(T-S)^t = T^t - S^t] \\
&= \frac{1}{2}\,(B^t-B) && [(T^t)^t = T] \\
&= \frac{1}{2}\,((-1)(B-B^t)) && [T-S = -(S-T) = (-1)(S-T)] \\
&= (-1)\left(\frac{1}{2}\,(B-B^t)\right) && [\lambda(\mu T) = \mu(\lambda T)] \\
&= -\left(\frac{1}{2}\,(B-B^t)\right) && [(-1)T = -T] \\
&= -B_2,
\end{aligned}$$

ο B_2 είναι αντισυμμετρικός. Έχουμε επίσης ότι

$$\begin{aligned}
B_1 + B_2 &= \frac{1}{2}\,(B+B^t) + \frac{1}{2}\,(B-B^t) \\
&= \frac{1}{2}\,\big((B+B^t)+(B-B^t)\big) && [\lambda T + \lambda S = \lambda(T+S)] \\
&= \frac{1}{2}\,\big((B+B^t)+(B+(-B^t))\big) && [T-S = T+(-S)] \\
&= \frac{1}{2}\,\big(B+(B^t+B)+(-B^t)\big) && [\text{προσεταιριστική ιδιότητα για την πρόσθεση πινάκων}] \\
&= \frac{1}{2}\,\big(B+(B+B^t)+(-B^t)\big) && [T+S = S+T] \\
&= \frac{1}{2}\,\big((B+B)+(B^t+(-B^t))\big) && [\text{προσεταιριστική ιδιότητα για την πρόσθεση πινάκων}] \\
&= \frac{1}{2}\,((B+B)+0) && [T+(-T) = T-T = 0] \\
&= \frac{1}{2}\,(B+B) && [T+0 = T] \\
&= \frac{1}{2}\,(2B) && [T+T = 2T] \\
&= \left(\frac{1}{2}\,2\right)B && [\lambda(\mu T) = (\lambda\mu)T] \\
&= 1B \\
&= B. && [1T = T]
\end{aligned}$$

Άρα ο B_1 είναι ένας συμμετρικός $n \times n$ πίνακας και ο B_2 ένας αντισυμμετρικός $n \times n$ πίνακας με $B = B_1 + B_2$.

Σημείωση: Πώς θα μπορούσαμε να σκεφτούμε για να καταλήξουμε στο ποιοί είναι οι B_1 και B_2; Έστω B_1 ένας συμμετρικός $n \times n$ πίνακας και B_2 ένας αντισυμμετρικός

$n \times n$ πίνακας με $B = B_1 + B_2$. Εφόσον ο B_1 είναι συμμετρικός, θα ισχύει

$$B_1^t = B_1. \tag{5}$$

Εφόσον ο B_2 είναι αντισυμμετρικός, θα ισχύει

$$B_2^t = -B_2. \tag{6}$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} B^t &= (B_1 + B_2)^t && [B = B_1 + B_2] \\ &= B_1^t + B_2^t && [(T+S)^t = T^t + S^t] \\ &= B_1 + B_2^t && [\text{από } (5)] \\ &= B_1 - B_2. && [\text{από } (6)] \end{aligned}$$

Άρα

$$B + B^t = (B_1 + B_2) + (B_1 - B_2) = 2B_1$$

και

$$B - B^t = (B_1 + B_2) - (B_1 - B_2) = 2B_2$$

και επομένως

$$B_1 = \frac{1}{2}\,(B + B^t)$$

και

$$B_2 = \frac{1}{2}\,(B - B^t).$$

14. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Θα λέμε ότι ο $n \times n$ πίνακας B είναι μία τετραγωνική ρίζα του A αν

$$B^2 = A.$$

Να βρεθούν όλες οι τετραγωνικές ρίζες του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

της μορφής

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
B \text{ τετραγωνική ρίζα του } A \quad &\Leftrightarrow \quad B^2 = A \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} ac & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & ca \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} ac & = & 1 \\ b^2 & = & 2 \\ ca & = & 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad ac = 1 \text{ και } b^2 = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{a}, \ a \neq 0 \text{ και } b = \pm\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Επομένως οι τετραγωνικές ρίζες του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

της μορφής

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & \pm\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ a \neq 0.$$

15. (α) Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας για τον οποίο ισχύει

$$A^3 = I_n.$$

Είναι ο A αντιστρέψιμος; Αν ναι, ποιος είναι ο αντίστροφός του;

(β) Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας για τον οποίο ισχύει

$$A^4 - 2A + I_n = 0.$$

Είναι ο A αντιστρέψιμος; Αν ναι, ποιος είναι ο αντίστροφός του;

Για να είναι ο $n \times n$ πίνακας T αντιστρέψιμος πρέπει να υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας S με

$$TS = I_n \text{ (ή με } ST = I_n).$$

Αν $TS = I_n$ (ή $ST = I_n$), τότε $S = T^{-1}$.

(α) Εφόσον $A^3 = AA^2$, έχουμε ότι

$$A^3 = I_n \Rightarrow AA^2 = I_n.$$

Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = A^2$.

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned}
A^4 - 2A + I_n = 0 &\Rightarrow A^4 - 2A + I_n = (A^4 - 2A) + (-(A^4 - 2A)) && [0 = T - T = T + (-T)] \\
&\Rightarrow (A^4 - 2A) + I_n = (A^4 - 2A) + (-(A^4 - 2A)) && [\text{προσεταιριστική ιδιότητα για την πρόσθεση πινάκων}] \\
&\Rightarrow I_n = -(A^4 - 2A) && [T + S = T + Q \Rightarrow S = Q] \\
&\Rightarrow I_n = 2A - A^4 && [-(T - S) = S - T] \\
&\Rightarrow I_n = 2(I_n A) - A^4 && [T = I_n T] \\
&\Rightarrow I_n = (2I_n)A - A^4 && [\lambda(TS) = (\lambda T)S] \\
&\Rightarrow I_n = (2I_n)A - A^3 A && [T^4 = T^3 T] \\
&\Rightarrow I_n = (2I_n - A^3)A. && [TQ - SQ = (T - S)Q]
\end{aligned}$$

Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = 2I_n - A^3$.

16. (α) Χρησιμοποιήστε απαλοιφή Gauss για να βρείτε τα b_1, b_2, b_3 για τα οποία το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl}
 & & 2x_2 & + & x_3 & = & b_1 \\
3x_1 & + & 3x_2 & - & 6x_3 & = & b_2 \\
-6x_1 & - & 2x_2 & + & 14x_3 & = & b_3
\end{array}$$

είναι συμβιβαστό.

(β) Είναι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -6 \\ -6 & -2 & 14 \end{bmatrix}$$

αντιστρέψιμος;

(γ) Έχει το ομογενές σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl}
 & & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\
3x_1 & + & 3x_2 & - & 6x_3 & = & 0 \\
-6x_1 & - & 2x_2 & + & 14x_3 & = & 0
\end{array}$$

μη τετριμμένες λύσεις;

(α) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$\begin{array}{rcrcrcl}
 & & 2x_2 & + & x_3 & = & b_1 \\
3x_1 & + & 3x_2 & - & 6x_3 & = & b_2 \\
-6x_1 & - & 2x_2 & + & 14x_3 & = & b_3
\end{array}$$

είναι ο

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & b_1 \\ 3 & 3 & -6 & b_2 \\ -6 & -2 & 14 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Ξεκινάμε με τα πρώτα βήματα της απαλοιφής Gauss:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & b_1 \\ 3 & 3 & -6 & b_2 \\ -6 & -2 & 14 & b_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 3 & -6 & b_2 \\ 0 & 2 & 1 & b_1 \\ -6 & -2 & 14 & b_3 \end{bmatrix}$$

Εναλλάσουμε την 1η και τη 2η γραμμή.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \frac{b_2}{3} \\ 0 & 2 & 1 & b_1 \\ -6 & -2 & 14 & b_3 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την 1η γραμμή με $\frac{1}{3}$.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \frac{b_2}{3} \\ 0 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & 4 & 2 & b_3 + 2b_2 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε 6 φορές την 1η γραμμή στην 3η.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \frac{b_2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{b_1}{2} \\ 0 & 4 & 2 & b_3 + 2b_2 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη 2η γραμμή με $\frac{1}{2}$.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \frac{b_2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{b_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + 2b_2 - 2b_1 \end{bmatrix}.$$

Προσθέτουμε -4 φορές τη 2η γραμμή στην 3η.

Αν

$$b_3 + 2b_2 - 2b_1 \neq 0,$$

τότε, εφόσον η τελευταία γραμμή του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \frac{b_2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{b_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + 2b_2 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

αντιστοιχεί στην εξίσωση

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = b_3 + 2b_2 - 2b_1,$$

το σύστημα δεν είναι συμβιβαστό.

Αν

$$b_3 + 2b_2 - 2b_1 = 0,$$

τότε ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \frac{b_2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{b_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + 2b_2 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

γίνεται

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \frac{b_2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{b_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας αυτός είναι σε κλιμακωτή μορφή και το αντίστοιχο σύστημα είναι το

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & \frac{b_2}{3} \\ & & x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & \frac{b_1}{2} \end{array}$$

(η 3η γραμμή του πίνακα αντιστοιχεί στην εξίσωση

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

η οποία επαληθεύεται από όλα τα x_1, x_2, x_3 και για αυτό το λόγο την παραλείπουμε).

Προφανώς το σύστημα αυτό είναι συμβιβαστό

Άρα το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & 2x_2 & + & x_3 & = & b_1 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 6x_3 & = & b_2 \\ -6x_1 & - & 2x_2 & + & 14x_3 & = & b_3 \end{array}$$

είνα συμβιβαστό για b_1, b_2, b_3 με

$$b_3 + 2b_2 - 2b_1 = 0.$$

(β) *1ος τρόπος:* Το σύστημα του ερωτήματος (α) γράφεται

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -6 \\ -6 & -2 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \qquad (7)$$

δηλαδή ο πίνακας συντελεστών του είναι ο A. Εφόσον από το ερώτημα (α) το σύστημα (7) δεν είναι συμβιβαστό για όλους τους 3×1 πίνακες

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

2ος τρόπος: Για να είναι ο πίνακας A αντιστρέψιμος πρέπει η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του να είναι ο I_3. Βρίσκουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A χρησιμοποιώντας απαλοιφή Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -6 \\ -6 & -2 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ -6 & -2 & 14 \end{bmatrix} \quad \boxed{\text{Εναλλάσουμε την 1η και τη 2η γραμμή.}}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -6 & -2 & 14 \end{bmatrix} \quad \boxed{\text{Πολλαπλασιάζουμε την 1η γραμμή με } \frac{1}{3}.}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \boxed{\text{Προσθέτουμε 6 φορές την 1η γραμμή στην 3η.}}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \boxed{\text{Πολλαπλασιάζουμε τη 2η γραμμή με } \frac{1}{2}.}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \boxed{\text{Προσθέτουμε -4 φορές τη 2η γραμμή στην 3η.}}$$

Εφόσον η 3η γραμμή του τελευταίου πίνακα αποτελείται αποκλειστικά από 0, η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A δε μπορεί να είναι ο I_3. Άρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Σημείωση: Στο 2ο τρόπο χρειάστηκε να κάνουμε πολύ παραπάνω δουλειά γιατί δε χρησιμοποιήσαμε αυτό που αποδείξαμε στο ερώτημα (α).

(γ) *1ος τρόπος:* Το σύστημα του ερωτήματος (α) γράφεται

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -6 \\ -6 & -2 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Το ομογενές σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 6x_3 & = & 0 \\ -6x_1 & - & 2x_2 & + & 14x_3 & = & 0 \end{array}$$

γράφεται

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -6 \\ -6 & -2 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Εφόσον από το ερώτημα (α) το σύστημα (8) δεν είναι συμβιβαστό για όλους τους 3×1 πίνακες

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

και το ομογενές σύστημα (9) έχει τον ίδιο πίνακα συντελεστών με το σύστημα (8), το ομογενές σύστημα (9) έχει μη τετριμμένες λύσεις.

2ος τρόπος: Το ομογενές σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 6x_3 & = & 0 \\ -6x_1 & - & 2x_2 & + & 14x_3 & = & 0 \end{array}$$

γράφεται

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -6 \\ -6 & -2 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Άρα ο πίνακας συντελεστών του είναι ο πίνακας A του ερωτήματος (β). Εφόσον από το ερώτημα (β) ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, το ομογενές σύστημα (10) έχει μη τετριμμένες λύσεις.

3ος τρόπος: Ο επαυξημένος πίνακας του ομογενούς συστήματος

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 6x_3 & = & 0 \\ -6x_1 & - & 2x_2 & + & 14x_3 & = & 0 \end{array}$$

είναι ο

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -6 \\ -6 & -2 & 14 \end{bmatrix}$$

(παραλείπουμε την τελευταία στήλη, γιατί αποτελείται αποκλειστικά από 0 και δεν επηρεάζεται από τις στοιχειώδεις διαδικασίες γραμμών). Βρίσκουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα χρησιμοποιώντας απαλοιφή Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -6 \\ -6 & -2 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ -6 & -2 & 14 \end{bmatrix} \quad \boxed{\text{Εναλλάσουμε την 1η και τη 2η γραμμή.}}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -6 & -2 & 14 \end{bmatrix} \quad \boxed{\text{Πολλαπλασιάζουμε την 1η γραμμή με } \frac{1}{3}.}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \boxed{\text{Προσθέτουμε 6 φορές την 1η γραμμή στην 3η.}}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \boxed{\text{Πολλαπλασιάζουμε τη 2η γραμμή με } \frac{1}{2}.}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boxed{\text{Προσθέτουμε -4 φορές τη 2η γραμμή στην 3η.}}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \boxed{\text{Προσθέτουμε -1 φορά τη 2η γραμμή στην 1η.}}$$

Άρα η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα είναι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι το

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & & -\ \frac{3}{2}\,x_3 & = & 0 \\ & x_2 & +\ \frac{1}{2}\,x_3 & = & 0 \end{array}$$

(η 3η γραμμή αντιστοιχεί στην εξίσωση

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

η οποία επαληθεύεται από όλες τις τιμές των x_1, x_2, x_3 και για αυτό την παραλείπουμε.). Το ομογενές αυτό σύστημα έχει 2 εξισώσεις και 3 μεταβλητές. Άρα έχει μη τετριμμένες λύσεις.

Σημείωση: Στον 3ο τρόπο χρειάστηκε να κάνουμε πολύ παραπάνω δουλειά γιατί δεν χρησιμοποιήσαμε αυτό που αποδείξαμε στο ερώτημα (α) ή στο ερώτημα (β).

17. (α) Είναι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & -5 & -9 \end{bmatrix}$$

αντιστρέψιμος;

(β) Έχει το ομογενές σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & - & 5x_2 & - & 9x_3 & = & 0 \end{array}$$

μη τετριμμένες λύσεις;

(α) Για να είναι ο πίνακας A αντιστρέψιμος πρέπει η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του να είναι ο I_3. Βρίσκουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A χρησιμοποιώντας απαλοιφή Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & -5 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -2 φορές την 1η γραμμή στη 2η και 3 φορές την 1η γραμμή στην 3η.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη 2η γραμμή με -1.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Προσθέτουμε -1 φορά την 1η γραμμή στην 3η.

Εφόσον η 3η γραμμή του τελευταίου πίνακα αποτελείται αποκλειστικά από 0, η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A δε μπορεί να είναι ο I_3. Άρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

(β) *1ος τρόπος:* Το ομογενές σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & - & 5x_2 & - & 9x_3 & = & 0 \end{array}$$

γράφεται

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & -5 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Άρα ο πίνακας συντελεστών του είναι ο πίνακας A του ερωτήματος (α). Εφόσον από το ερώτημα (α) ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, το ομογενές σύστημα (11) έχει μη τετριμμένες λύσεις.

2ος τρόπος: Ο επαυξημένος πίνακας του ομογενούς συστήματος

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & - & 5x_2 & - & 9x_3 & = & 0 \end{array}$$

είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & -5 & -9 \end{bmatrix}$$

(παραλείπουμε την τελευταία στήλη, γιατί αποτελείται αποκλειστικά από 0 και δεν επηρεάζεται από τις στοιχειώδεις διαδικασίες γραμμών). Βρίσκουμε την κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα χρησιμοποιώντας απαλοιφή Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & -5 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -2 φορές την 1η γραμμή στη 2η και 3 φορές την 1η γραμμή στην 3η.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη 2η γραμμή με -1.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -1 φορά την 1η γραμμή στην 3η.

Άρα η κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα είναι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι το

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & - & 2x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

(η 3η γραμμή αντιστοιχεί στην εξίσωση

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

η οποία επαληθεύεται από όλες τις τιμές των x_1, x_2, x_3 και για αυτό την παραλείπουμε.). Το ομογενές αυτό σύστημα έχει 2 εξισώσεις και 3 μεταβλητές. Άρα έχει μη τετριμμένες λύσεις.

Σημείωση: Στο 2ο τρόπο χρειάστηκε να κάνουμε πολύ παραπάνω δουλειά γιατί δεν χρησιμοποιήσαμε αυτό που αποδείξαμε στο ερώτημα (α).

18. (α) Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(β) Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{array}{ccccccc} & & 2x_2 & + & 4x_3 & = & b_1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & b_2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & b_3 \end{array}.$$

(α) Σχηματίζουμε τον πίνακα

$$[A|I_3].$$

Χρησιμοποιώντας απαλοιφή Gauss-Jordan θα πάρουμε τον πίνακα

$$[I_3|A^{-1}].$$

Έχουμε

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εναλλάσουμε την 1η και τη 2η γραμμή.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη 2η γραμμή με $\frac{1}{2}$.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -1 φορά τη 2η γραμμή στην 3η.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την 3η γραμμή με -1.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Προσθέτουμε -2 φορές την 3η γραμμή στη 2η και -2 φορές την 3η γραμμή στην 1η.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Προσθέτουμε -3 φορές τη 2η γραμμή στην 1η.

Επομένως

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -4 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(β) *1ος τρόπος:* Το σύστημα

$$\begin{array}{ccccccc} & & 2x_2 & + & 4x_3 & = & b_1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & b_2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & b_3 \end{array}$$

γράφεται

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Άρα ο πίνακας συντελεστών του είναι ο πίνακας A του ερωτήματος (α). Εφόσον από το (α) ο A είναι αντιστρέψιμος, για κάθε 3×1 πίνακα

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

το σύστημα (12) έχει μία μοναδική λύση, την

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Εφόσον από το (α)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -4 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
A^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -4 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{b_1}{2} + b_2 - 4b_3 \\ -\frac{b_1}{2} + 2b_3 \\ \frac{b_1}{2} - b_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Άρα για όλα τα b_1, b_2, b_3 το σύστημα

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
 & & 2x_2 & + & 4x_3 & = & b_1 \\
x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & b_2 \\
 & & x_2 & + & x_3 & = & b_3
\end{array}
$$

έχει μία μοναδική λύση, την

$$
x_1 = \frac{b_1}{2} + b_2 - 4b_3,\ x_2 = -\frac{b_1}{2} + 2b_3,\ x_3 = \frac{b_1}{2} - b_3.
$$

2ος τρόπος: Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
 & & 2x_2 & + & 4x_3 & = & b_1 \\
x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & b_2 \\
 & & x_2 & + & x_3 & = & b_3
\end{array}
$$

είναι ο

$$
\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & b_1 \\ 1 & 3 & 2 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & b_3 \end{bmatrix}.
$$

Χρησιμοποιώντας απαλοιφή Gauss-Jordan βρίσκουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & b_1 \\ 1 & 3 & 2 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & b_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & b_2 \\ 0 & 2 & 4 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_3 \end{bmatrix}$$

Εναλλάσουμε την 1η και τη 2η γραμμή.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & b_2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{b_1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & b_3 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη 2η γραμμή με $\frac{1}{2}$.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & b_2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{b_1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{b_1}{2} + b_3 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -1 φορά τη 2η γραμμή στην 3η.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & b_2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{b_1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b_1}{2} - b_3 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την 3η γραμμή με -1.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -b_1 + b_2 + 2b_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b_1}{2} + 2b_3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b_1}{2} - b_3 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -2 φορές την 3η γραμμή στη 2η και -2 φορές την 3η γραμμή στην 1η.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{b_1}{2} + b_2 - 4b_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b_1}{2} + 2b_3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b_1}{2} - b_3 \end{bmatrix}.$$

Προσθέτουμε -3 φορές τη 2η γραμμή στην 1η.

Άρα η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{b_1}{2} + b_2 - 4b_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b_1}{2} + 2b_3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b_1}{2} - b_3 \end{bmatrix}.$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{2} + b_2 - 4b_3 \\ x_2 &= -\frac{b_1}{2} + 2b_3 \\ x_3 &= \frac{b_1}{2} - b_3 \end{aligned}.$$

Άρα για όλα τα b_1, b_2, b_3 το σύστημα

$$\begin{array}{ccccccc} & & 2x_2 & + & 4x_3 & = & b_1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & b_2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & b_3 \end{array}$$

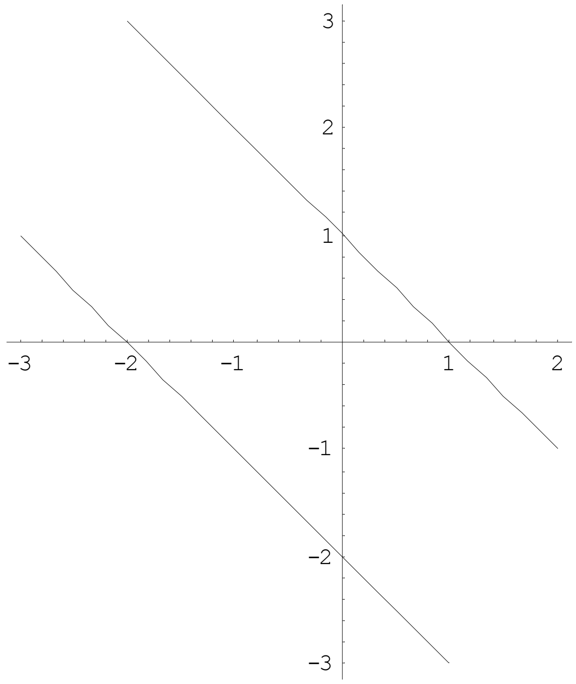
έχει μία μοναδική λύση, την

$$x_1 = \frac{b_1}{2} + b_2 - 4b_3,\ x_2 = -\frac{b_1}{2} + 2b_3,\ x_3 = \frac{b_1}{2} - b_3.$$

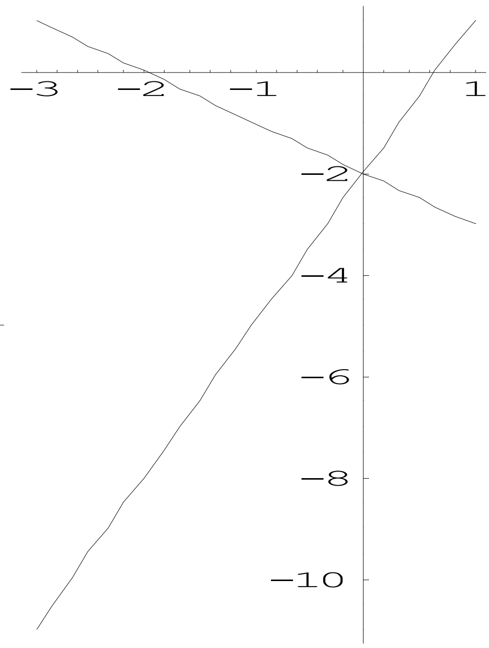
Σημείωση: Στο 2ο τρόπο χρειάστηκε να κάνουμε πολύ παραπάνω δουλειά γιατί δεν χρησιμοποιήσαμε αυτό που αποδείξαμε στο ερώτημα (α).

19. Έστω A_1 και A_2 δύο $n \times n$ πίνακες. Αποδείξτε ότι αν το ομογενές σύστημα $A_1X = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση και η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A_2 είναι ο I_n, τότε ο πίνακας $A_1A_2^t$ είναι αντιστρέψιμος.

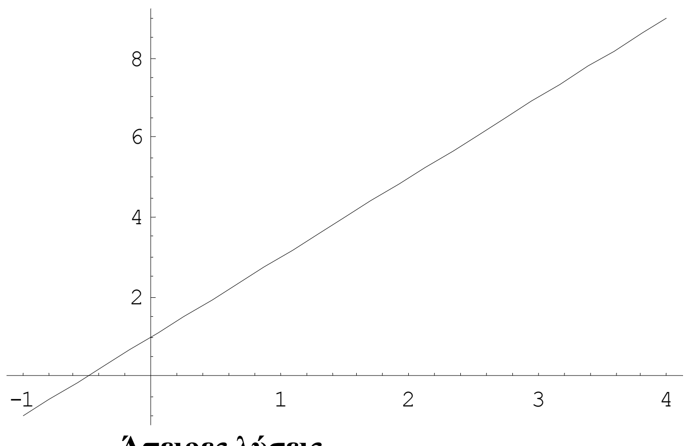
Εφόσον το ομογενές σύστημα $A_1X = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση, ο πίνακας συντελεστών του A_1 είναι αντιστρέψιμος. Εφόσον η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A_2 είναι ο I_n, ο A_2 είναι γραμμοισοδύναμος με τον I_n και άρα ο A_2 είναι αντιστρέψιμος. Εφόσον ο A_2 είναι αντιστρέψιμος, ο A_2^t είναι αντιστρέψιμος (ο ανάστροφος ενός αντιστρέψιμου πίνακα είναι αντιστρέψιμος). Εφόσον οι A_1 και A_2^t είναι αντιστρέψιμοι, ο $A_1A_2^t$ είναι αντιστρέψιμος (το γινόμενο δύο αντιστρέψιμων πινάκων είναι αντιστρέψιμος πίνακας).



Καμία λύση

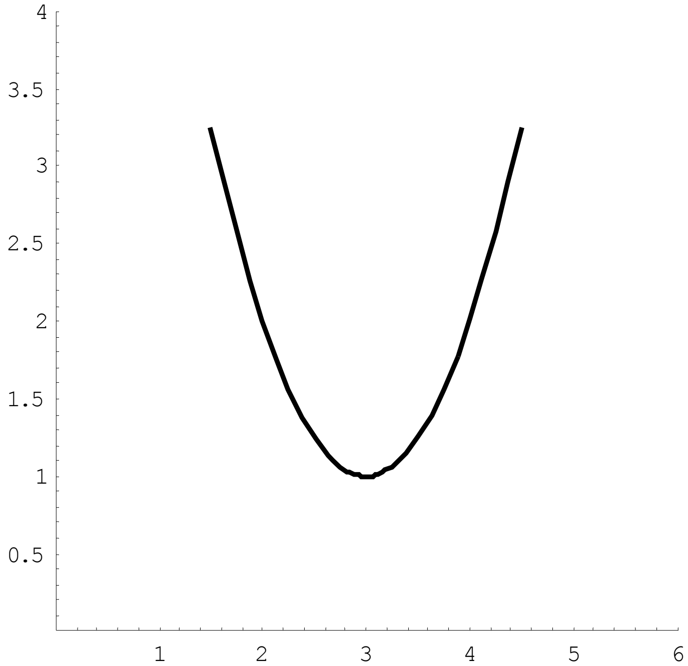


Μία λύση

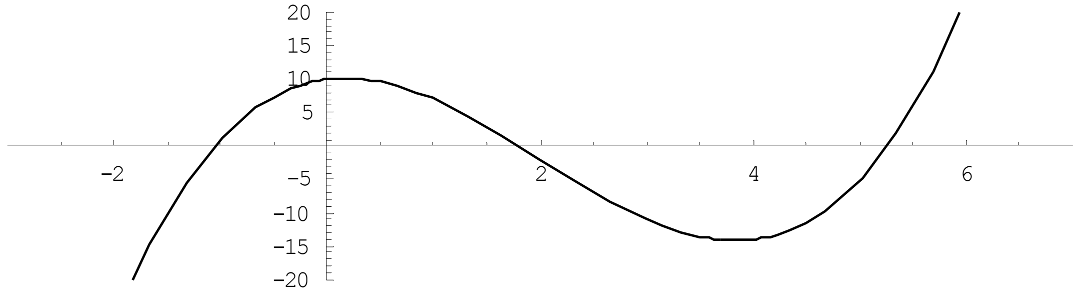


Άπειρες λύσεις

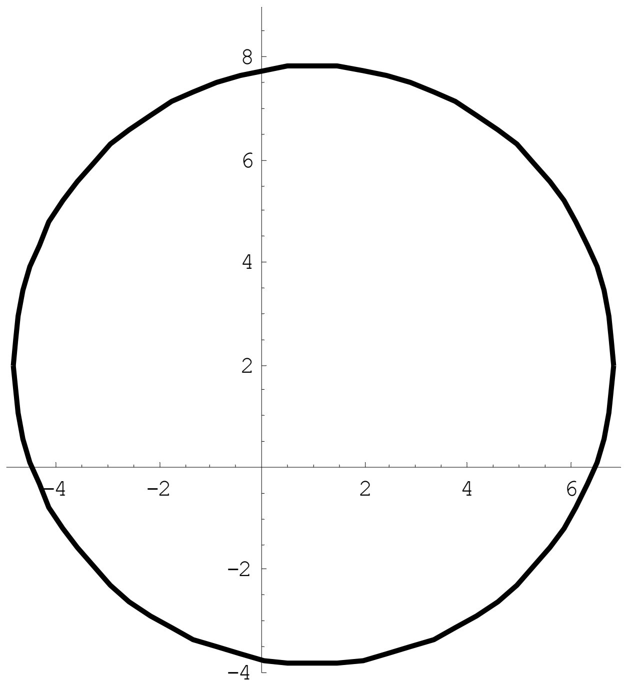
Σχήμα 1, σελίδα 6



Σχήμα 2, σελίδα 10



Σχήμα 1, σελίδα 22



Σχήμα 1, σελίδα 27